IV] Dimensiones altas: M variedad suave, cerrada, sin borde, $\dim = \dim_{\mathbb{R}} \geq 4$

Hecho: $\forall\, \Gamma$ finitamente presentado existe M^4 con $\Gamma = \pi_1(M^4)$

Restricción: M asférica ($\tilde{M}$ contractible, mismo a

$$\pi_i(M) = \begin{cases} \Gamma & i=1 \\ 0 & i\geq 2 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Invariantes homotópicos de M $\leftrightsquigarrow$ Invariantes de Γ

Ejemplo: Γ cumple dualidad de Poincaré: $H^*(\Gamma;R) \xrightarrow{\sim} H_{n-*}(\Gamma;R)$

Conjetura (Borel): M, N variedades cerradas, orientables, asféricas

$$M \underset{\text{homeo}}{\sim} N \longleftrightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(N)$$

Conjetura: Γ finitamente presentado y cumple dualidad de Poincaré de dimensión $n \Rightarrow \Gamma = \pi_1(M)$, M n-variedad cerrada

(abierto si $n \geq 3$)

Condición que garantiza asfericidad: curvatura no positiva

Variedades hiperbólicas (reales / complejas / quaterniónicas)

$\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}\}$ $\rightsquigarrow$ norma $|\cdot| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

quaterniones $\rightsquigarrow$ conjugación $x \longmapsto \bar{x}$

↳ En $\mathbb{F}^{n+1}$, hay forma skew-bilineal $B(x,y) = -\bar{x}_0 y_0 + \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n$

coord $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $\rightsquigarrow$ $Q(x) = B(x,x) = -|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$

signatura $(1,n)$

↳ **Definición:** $\mathbb{H}^n_{\mathbb{F}} := \{[x] \in \mathbb{P}(\mathbb{F}^{n+1}) \mid Q(x) < 0\}$ **espacio $\mathbb{F}$-hiperbólico**

+ métrica $\cosh d([x],[y]) = \dfrac{|B(x,y)|}{\sqrt{|Q(x)||Q(y)|}}$

[viene de métrica de restringir B a $T_p \mathbb{H}^n_{\mathbb{F}} = \langle p \rangle^{\perp}$ tq $Q(p) = -1$]

Isometrías: $\mathbb{F} = \mathbb{R} \longrightarrow SO_0(n,1)$ [preservan orientación]

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \longrightarrow PU(n,1)$ [isometrías holomorfas]

Definición: **Látice (retículo):** es $\Gamma < \mathrm{Isom}\, \mathbb{H}^n_{\mathbb{F}}$ subgrupo discreto tq $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n_{\mathbb{F}}$ tiene volumen finito. Γ es uniforme si $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n_{\mathbb{F}}$ compacto

[Γ sin torsión $\Rightarrow M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n_{\mathbb{F}}$ variedad]

Teorema (Borel-Harish-Chandra): [Caso particular] Existen retículos uniformes en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{F}}$ para todo $n \geq 1$ y $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}\}$

Ejemplos (Variedades aritméticas de tipo simple, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$):

- $K \subset \mathbb{R}$ cuerpo de números totalmente real,
- q forma cuadrática en K^{n+1} tq:
  - de signatura $(n,1)$ en K
  - positiva definida en todo otro embedding de Galois $K \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$
- $\mathcal{O}_K$ = enteros algebraicos de K

$\rightarrow$ Sea $\Gamma < SO(q;K)$ conmensurable a $SO(q;\mathcal{O}_K)$

$$|\Gamma : \Gamma \cap SO(q;\mathcal{O}_K)|,\ |SO(q;\mathcal{O}_K) : \Gamma \cap SO(q;\mathcal{O}_K)| < \infty$$

$$\Rightarrow \Gamma < SO(q;K) \hookrightarrow SO(q;\mathbb{R}) \approx SO(n,1) \text{ retículo}$$

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $q = -\sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ $\quad \sigma : \sqrt{2} \to -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Gamma = SO(q; \mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \hookrightarrow SO(n,1)$ látice uniforme! $\quad q^\sigma = \sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$

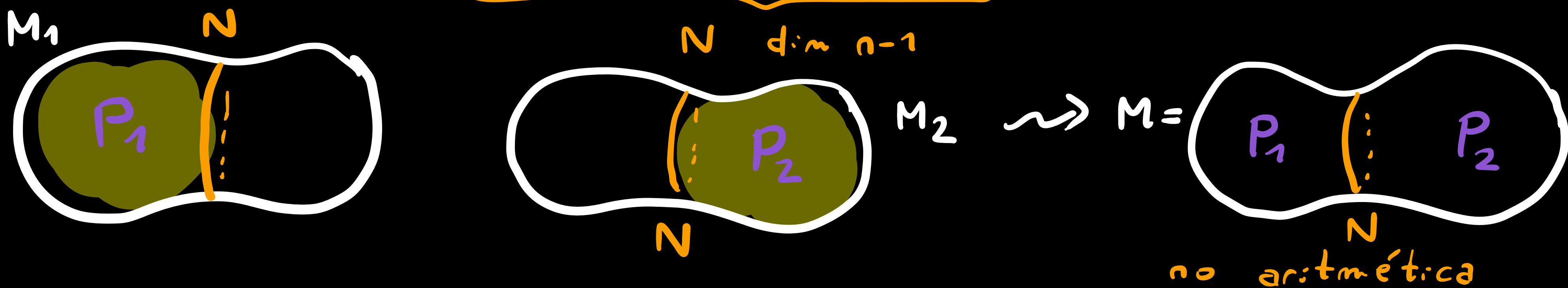
Estas látices son **aritméticas**: **Teorema de Margulis**

$$\mathrm{Comm}(\Gamma) = \{g \in SO(n,1) \mid g\Gamma g^{-1}, \Gamma \text{ conmesurables}\} \text{ es denso en } SO(n,1)$$

Teorema (Gromov-Piatetski-Shapiro): $\forall\, n$ existen retículos no aritméticos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$:

Ejemplo: $$q_1 = -\sqrt{2}\, x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \rightsquigarrow M_1 \text{ dim } n$$

$k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $$q_2 = \underbrace{-\sqrt{2}\, x_0 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}_{N \text{ dim } n-1} + 3x_n^2 \rightsquigarrow M_2 \text{ dim } n$$



Teorema (Italiano-Martelli-Migliorini '21): $\exists\, M^5$ variedades hiperbólicas reales (no-compactas de volumen finito) que fibran sobre S^1

Pregunta: M^5 variedad hiperbólica (volumen finito) $\Rightarrow \exists\, \hat{M} \to M$ cubriente finito que fibra sobre S^1?

Variedades aritméticas de tipo simple ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

→ K cuerpo totalmente real

→ L/K extensión cuadrática totalmente imaginaria (suponer $L \subset \mathbb{C}$, $K = L \cap \mathbb{R}$)

→ q forma cuadrática Hermitiana de $n+1$ variables con coef. en L tq

- q de signatura $(n,1)$
- q^σ de signatura $(n+1,0)$ si $\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$ no trivial

⇒ Si $\mathcal{O}_L$ = enteros algebraicos en L

Def: $\Gamma < PU(n,1)$ aritmética de tipo simple si conmesurable a

$$PU(q, \mathcal{O}_L) < PU(q, \mathbb{C}) \simeq PU(n,1)$$

Ejemplo: $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $q = -\sqrt{5}\, z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2$

$$\Rightarrow \quad PU(q, \mathcal{O}_L) \hookrightarrow PU(n,1)$$

Teorema: Existen finitos ejemplos de retículos no aritméticos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ $(n \geq 2)$: para $n = 2$ (22 clases de conmensurabilidad)

$n = 3$ (2 clases de conmensurabilidad)

Pregunta: Existen retículos no aritméticos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ con $n \geq 4$?