Superficies algebraicas y π_1

Sesión pasada: Variedades hiperbólicas

$\rightarrow$ Reales : $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $\Gamma < SO_0(n,1)$ retículo (uniforme)

$\rightarrow$ Complejas: $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $\Gamma < PU(n,1)$ retículo (uniforme)

Semejanzas

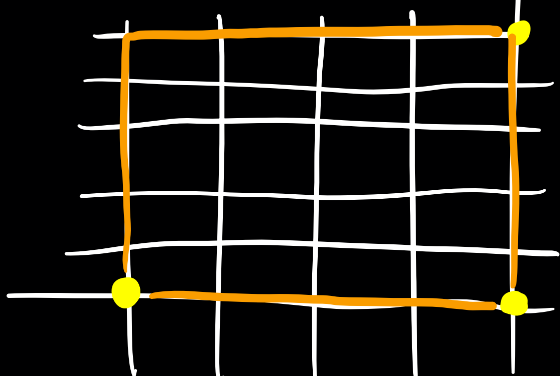
$\hookrightarrow$ Riemannianas: curvatura seccional negativa ($\mathbb{R}: -1$, $\mathbb{C}: \in [-1, -1/4]$)

$\hookrightarrow$ π_1: Finitamente generados, hiperbólicos en sentido de Gromov

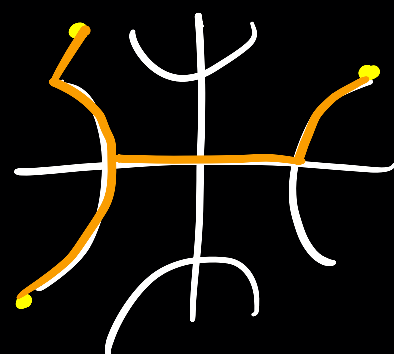
Definición (Grafo de Cayley): Γ grupo finitamente generado pos $S \subset \Gamma$ ($S = S^{-1}$)

$\rightsquigarrow$ $Cay(\Gamma, S)$ grafo con vértices $V = \Gamma$, aristas $= \{g, gs\}$, $s \in S, g \in \Gamma$

Ejemplos: $\mathbb{Z}^2$, $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$



$F_2 = \langle a, b \rangle$, $S = \{a^{\pm}, b^{\pm}\}$

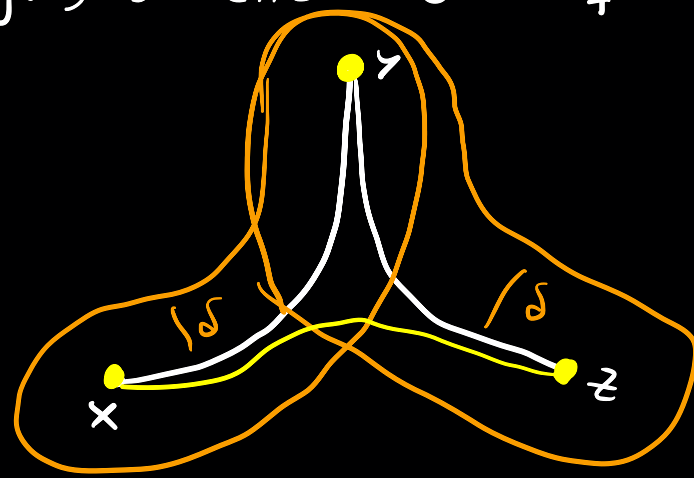


Definición (hiperbolicidad de Gromov): Γ finitamente generado es **hiperbólico** **(δ-hiperbólico)** si dado $\mathcal{C}ay(\Gamma, S)$ existe $\delta \geq 0$ tq

$\forall$ Δ triángulo geodésico con vértices x, y, z

se tiene $[x,z] \subset N_\delta([x,y] \cup [y,z])$

"Gauss- Bonnet"



Ejemplo: • F_2 es hiperbólico

• π_1(M variedad compacta sin borde, curvatura < 0) es hiperbólico

Retículos cocompactos $\Gamma < PU(n,1)$ $(-1 \leq K \leq -1/4)$, $SO_0(n,1)$ $(K \equiv -1)$

• Γ hiperbólico $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}^2 \not< \Gamma$

Pregunta:

1) Formas robustas de producir superficies algebraicas asféricas ($\pi_n = 0$, $n \geq 2$)

2) Formas robustas de producir suberficies algebraicas con π_1 hiperbólico

3) Existe superficie aesférica con π_1 no residualmente finito?

Observación:

$X^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$, $Y \subset X$ hyp. section s.t. $X \setminus Y$ suave
$\Rightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{\sim} \pi_i(X)$ $i < n-1$, $\twoheadrightarrow$ $i = n-1$

Teorema del hiperplano de Lefschetz $\Rightarrow$ Cualquier π_1 de variedad proyectiva suave es π_1 de superficie proyectiva suave

Relación π_2 vs aesférico

Teorema (Delzant): X superficie Kähler compacta con $\pi_1(X)$ no conmensurable a $\pi_1(\Sigma_g)$ $(g \geq 1)$. Entonces

$$X \text{ aesférica } \longleftrightarrow \pi_2(X) = 0$$

$\hookrightarrow$ **Teorema (Gromov):** Si $H^1_{(2)}(\tilde{X}) \neq 0$ (cohomología L^2 de $\tilde{X}$) entonces $\pi_1(X)$ conmensurable a $\pi_1(\Sigma_g)$

$\hookrightarrow$ Suponer $\pi_2(X) = 0$

$\hookrightarrow$ Hurewicz $\Rightarrow$ X aesférica $\longleftrightarrow$ $H_3(\tilde{X}; \mathbb{Z}) = 0$

$\hookrightarrow$ $\tilde{X} \sim$ 3-cpx $\Rightarrow$ suficiente $H_3(\tilde{X}; \mathbb{R}) = 0$

$\hookrightarrow$ Dualidad de Poincaré $\Rightarrow$ $H_3(\tilde{X}; \mathbb{R}) \cong H^1_c(\tilde{X}; \mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ $\therefore$ $H_3 \neq 0 \Rightarrow 0 \neq H^1_c(\tilde{X}; \mathbb{R}) \subset H^1_{(2)}(\tilde{X}; \mathbb{R})$ $\square$

Ejemplos de superficies aesféricas:

- Cocientes de la bola: $X = \Gamma \backslash \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2 \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ $\left(c_1^2(X) = 3c_2(X)\right)$

Desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau:

X superficie compacta de tipo general $\Rightarrow c_1^2 \leq 3c_2$

Yau: $c_1^2 = 3c_2 \Rightarrow X$ cociente de la bola

Cubrimientos ramificados de productos de curvas (Kodaira '67, Atiyah '69]

- Σ^0 curva de género $g_0 \geq 2$ $\qquad (2-2g) = d(2-2g_0)$
- $\Sigma \to \Sigma^0$ cubrimiento cíclico de orden d, $\sigma \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \mathrm{Deck}(\Sigma/\Sigma^0)$ generador
- $\Sigma' \xrightarrow{\rho} \Sigma$ cubrimiento asociado al kernel de

$$\pi_1(\Sigma) \longrightarrow H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{2g}$$

- En $\Sigma' \times \Sigma$: $\Gamma_i = \{(x, \sigma^i(\rho(x))) \mid x \in \Sigma'\} \Rightarrow \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ si $i \not\equiv j \pmod d$
- $D := \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_{d-1}$, curva suave en $\Sigma' \times \Sigma$ tq $d \mid [D]$ en $H_2(\Sigma' \times \Sigma)$
- * Existe X superficie compacta y $X \xrightarrow{f} \Sigma' \times \Sigma$ cubrimiento d-cíclico ramificado en D

$$\therefore \quad X \to \Sigma' \times \Sigma \to \Sigma' \text{ fibrado con fibra } f^{-1}(\Sigma)$$