SGA 2021-1 (Semana 6): "Ejemplos de Estructuras de Hodge Mixtas"

§1. Recuerdos:

Una ESTRUCTURA DE HODGE (PURA) DE PESO $k \in \mathbb{Z}$ es $(H_\mathbb{Z}, H^{p,q})$ con $H_\mathbb{Z}$ reticulado junto con una descomposición

$$H_\mathbb{Z}\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{C} =: H_\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \text{con } H^{p,q}=\overline{H^{q,p}}.$$

Lo anterior define una filtración decreciente $\{F^p\}$ en $H_\mathbb{C}$

$$H_\mathbb{C} = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^k \supseteq \{0\}$$

tal que $H_\mathbb{C} \cong F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}}$. En efecto, basta definir

(cf. Semana pasada)

$$F^p = F^pH_\mathbb{C} := H^{k,0}\oplus H^{k-1,1}\oplus\dots\oplus H^{p,k-p} \rightsquigarrow Gr_F^p H_\mathbb{C} := \frac{F^p}{F^{p+1}} \cong H^{p,k-p}$$

Ejemplo principal (Teorema de descomposición de Hodge):

Sea X variedad alg. proyectiva suave (o Kähler compacta) $\rightsquigarrow (H_\mathbb{Z}(X), H^{p,q}(X))$

con: a) $H_\mathbb{Z}(X) := H^k(X,\mathbb{Z})/\text{torsion}$

b) $H^{p,q}(X) \cong H^q(X,\Omega^p_X) \rightsquigarrow h^{p,q}(X) := \dim_\mathbb{C} H^{p,q}(X)$ números de Hodge

Def: Sea $r \in \mathbb{Z}$, y sean $(V_{\mathbb{Z}}, V^{p,q})$ y $(W_{\mathbb{Z}}, W^{p,q})$ estructuras de Hodge de pesos k y $k+2r$, resp. Un MORFISMO DE ESTRUCTURAS DE HODGE DE BIGRADO (r,r) es $\varphi : V_{\mathbb{Z}} \to W_{\mathbb{Z}}$ morfismo de grupos tal que $\varphi_{\mathbb{C}}(V^{p,q}) \subseteq W^{p+r,q+r}$ $(\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}(F^p V_{\mathbb{C}}) \subseteq F^{p+r} W_{\mathbb{C}})$.

bigrado $(0,0)$

Eg. $f : X \to Y$ holomorfo entre var. Kähler compactas $\rightsquigarrow f^* : H^k(Y,\mathbb{Z})/_{\text{tors}} \to H^k(X,\mathbb{Z})/_{\text{tors}}$

<u>Ejemplo</u> (Jacobiana intermedia): Sea $(H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q})$ de peso impar $2k-1$.

$\rightsquigarrow F^k H_{\mathbb{C}} = H^{2k-1,0} \oplus H^{2k-2,1} \oplus \dots \oplus H^{k,k-1}$

Se define el toro complejo $J^{2k-1}(H) := H_{\mathbb{C}} / (F^k H_{\mathbb{C}} \oplus H_{\mathbb{Z}})$.

<u>Functorial</u>: Si $\varphi : (V_{\mathbb{Z}}, F^\bullet V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow (W_{\mathbb{Z}}, F^{\bullet+r} W_{\mathbb{C}})$ de bigrado (r,r)

$\rightsquigarrow J(\varphi) : J^{2k-1}(V) \longrightarrow J^{2(k+r)-1}(W)$ morfismo de toros complejos.

En el caso de $H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})/\text{torsión}$ obtenemos la JACOBIANA INTERMEDIA

$J^{2k-1}(X) = H^{2k-1}(X,\mathbb{C}) / (F^k H^{2k-1}(X,\mathbb{C}) \oplus H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})/\text{tors})$; $\dim = b_{2k-1}(X)/2$

§ 2. Cálculos de Estructuras de Hodge Mixtas

Def: Una ESTRUCTURA DE HODGE MIXTA es $(H_\mathbb{Z}, W_\bullet, F^\bullet)$ donde $H_\mathbb{Z}$ es un reticulado junto con

·) FILTRACIÓN DE PESO:

$$\cdots \subseteq W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_N = H := H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$$

·) FILTRACIÓN DE HODGE:

$$H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} =: H_\mathbb{C} = F^0 \supseteq F^1 \supseteq F^2 \supseteq \cdots$$

tal que $F^\bullet$ define una estructura de Hodge de peso k en

$$Gr_k^W H := W_k H / W_{k-1} H$$

$W_\bullet$ definida sobre $\mathbb{Q}$ es Invariante por conjugación compleja

cond. necesaria para admitir Estr. de Hodge

Terminología: los NÚMEROS DE HODGE de $(H_\mathbb{Z}, W, F)$ son

$$h^{p,q}(H) := \dim_\mathbb{C} Gr_F^p \, Gr^W_{p+q} H_\mathbb{C}$$

Ejemplo: Sea X variedad de Kähler compacta (eg. var. proy suave)

Definimos $H_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X, \mathbb{Z})/\text{torsión} \rightsquigarrow H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X, \mathbb{Q}) = H^*(X, \mathbb{Q})$

y definimos $W_k H := \bigoplus_{i \leq k} H^i(X, \mathbb{Q})$ y $F^p H_{\mathbb{C}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{F^p H^i(X, \mathbb{C})}_{H^{i,0}(X) \oplus \cdots \oplus H^{p,i-p}(X)}$

$\Rightarrow Gr_k^W H = H^k(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow Gr_k^W H_{\mathbb{C}} = H^k(X, \mathbb{C})$

$\rightsquigarrow Gr_F^p Gr_{p+q}^W H_{\mathbb{C}} = Gr_F^p H^{p+q}(X, \mathbb{C}) \cong H^{p,q}(X)$

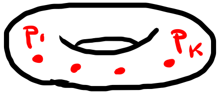
$\Rightarrow h^{p,q}(H) = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)$ ✓

Slogan: "Para extender la descomposición de Hodge en var. de Kähler compactas a contextos más generales, debemos aceptar estructuras de Hodge MIXTAS"

Teo (Deligne, 1971): Sea $\mathcal{U}$ var. alg suave (eg. abierta!). Entonces, $H_{\mathbb{Z}} = H^k(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ /tors posee una estructura de Hodge mixta (functorial!). Más aún, $Gr_i^W H = 0$ a menos que $k \leq i \leq \min(\dim \mathcal{U}, 2k)$.

Ejemplo (curvas elípticas): Sea $E \simeq$  $\subseteq \mathbb{P}^2$ curva elíptica.

$\rightsquigarrow$ Torelli: E está det. por la estructura de Hodge en $H^1(E,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ $(\rightsquigarrow J^1(E) \cong E)$

(a) 

$\mathcal{U} := E \setminus \{p_1, \dots, p_K\}$ y calculamos (eg. Gysin): $H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{K+1}$

Obs: Si K par $\Rightarrow$ $H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q})$ NO posee estructura de Hodge (pura) de peso 1 (pues en tal caso $\dim_{\mathbb{C}} h^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) = h^{1,0} + h^{0,1} = 2h^{1,0}$ sería par)

Deligne: $H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q})$ admite una estructura de Hodge MIXTA, que se puede deducir de:

cohomología relativa $\cong H^{i-2}(E\setminus\mathcal{U},\mathbb{Q})$

$$\dots \to H^i(E,\mathcal{U};\mathbb{Q}) \to H^i(E,\mathbb{Q}) \to H^i(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to H^{i+1}(E,\mathcal{U};\mathbb{Q}) \to \dots$$ [Andreotti Frankel]

$$0 \to \underbrace{H^0(E,\mathbb{Q})}_{\cong\mathbb{Q}} \xrightarrow{(0,0)} \underbrace{H^0(\mathcal{U},\mathbb{Q})}_{?} \to 0 \to \underbrace{H^1(E,\mathbb{Q})}_{\cong\mathbb{Q}} \xrightarrow{(0,0)} \underbrace{H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q})}_{?} \xrightarrow{(-1,-1)} \underbrace{\bigoplus_{j=1}^{K} H^0(p_j,\mathbb{Q})}_{\simeq\mathbb{Q}^K} \xrightarrow{(1,1)} \underbrace{H^2(E,\mathbb{Q})}_{\cong\mathbb{Q}} \xrightarrow{(0,0)} \underbrace{H^2(\mathcal{U},\mathbb{Q})}_{=0 \text{ pues } \mathcal{U} \text{ afín}} \to 0$$

$$Gr_0^W: \; 0 \to H^0(E,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} Gr_0^W H^0(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to 0 \to 0 \to Gr_0^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to Gr_{-2}^W \bigoplus_{j=1}^{K} H^0(p_j,\mathbb{Q}) = 0 \to 0 \to 0 \to 0$$

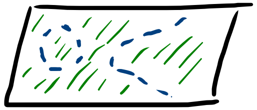
$$Gr_1^W: \; 0 \to 0 \to Gr_1^W H^0(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to 0 \to H^1(E,\mathbb{Q}) \to Gr_1^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to Gr_{-1}^W \bigoplus_{j=1}^{K} H^0(p_j,\mathbb{Q}) = 0 \to 0 \to 0 \to 0$$

$$Gr_2^W: \; 0 \to 0 \to Gr_2^W H^0(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to 0 \to 0 \to Gr_2^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \to \bigoplus_{j=1}^{K} H^0(p_j,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^K \twoheadrightarrow H^2(E,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q} \to 0 \to 0$$

De lo anterior, deducimos que ⇝ $H^1(E,\mathbb{Q})$ "recuerda" la curva elíptica!

$$Gr_0^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) = 0, \quad Gr_1^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2, \quad Gr_2^W H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{k-1} \quad (\Rightarrow H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^{k+1})$$

(b) Si ahora consideramos $V := \mathbb{P}^2 \setminus E$



Como antes, consideramos:

$$0 \to \overset{0\ (\text{gysin})}{\cancel{H^0(\mathbb{P}^2,V;\mathbb{Q})}} \to \underbrace{H^0(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})}_{\simeq \mathbb{Q}} \to \underline{H^0(V;\mathbb{Q})} \to \overset{0\ (\text{gysin})}{\cancel{H^1(\mathbb{P}^2,V;\mathbb{Q})}} \to \overset{0}{\cancel{H^1(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})}} \to \underline{H^1(V,\mathbb{Q})}$$

$$\xrightarrow{(-1,-1)} \underbrace{H^2(\mathbb{P}^2,V;\mathbb{Q})}_{\simeq H^0(E,\mathbb{Q})\ (\text{gysin})} \xrightarrow{(1,1)} \underbrace{H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})}_{= \mathbb{Q}} \to \underline{H^2(V,\mathbb{Q})} \xrightarrow{(-1,-1)} \underbrace{H^3(\mathbb{P}^2,V;\mathbb{Q})}_{\simeq H^1(E,\mathbb{Q})\ (\text{gysin})} \to 0 \quad \left(H^i(V;\mathbb{Q}) \overset{\text{Andreotti-Frankel}}{=} 0\ \forall i>2\right)$$

Gr_0^W: $H^0(V,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ pura de peso 0.

Gr_1^W: $Gr_1^W H^1(V,\mathbb{Q}) = 0$ y $Gr_1^W H^2(V,\mathbb{Q}) = 0$

Gr_2^W: $0 \to Gr_2^W H^1(V,\mathbb{Q}) \to H^0(E,\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{\alpha} H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q}) \to Gr_2^W H^2(V,\mathbb{Q}) \to 0$

⇝ $Gr_2^W H^1(V,\mathbb{Q}) = 0$ y $Gr_2^W H^2(V,\mathbb{Q}) = 0$

Gr_3^W: $Gr_3^W H^2(V,\mathbb{Q}) \cong H^1(E,\mathbb{Q})$ ⇝ "V recuerda la curva elíptica"

§3. Sucesiones espectrales induciendo MHS

Comencemos por "recordar" el marco general de sucesiones espectrales e hipercohomología

Sea X esp. top y $\cdots \xrightarrow{d} A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \to \cdots$ complejo de haces $A^\bullet$

Consideramos una RESOLUCIÓN ACÍCLICA $(I^{\bullet,\bullet}, d, d')$ de $A^\bullet$, i.e., un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vphantom{I} & \vphantom{I} & \vphantom{I} & \\
\cdots \arrow[r] & I^{0,1} \arrow[r] \arrow[u, "d'"'] & I^{1,1} \arrow[r] \arrow[u, "d'"'] & I^{2,1} \arrow[r] \arrow[u, "d'"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "d'"'] & I^{1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "d'"'] & I^{2,0} \arrow[r] \arrow[u, "d'"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[u, "d'"'] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[u, "d'"'] & A^2 \arrow[r] \arrow[u, "d'"'] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

con filas y columnas de $I^{\bullet,\bullet}$ exactas

(ACÍCLICO)

y tal que $H^n(X, I^{i,j}) = 0 \ \forall n > 0$ $\rightsquigarrow$ $(I^\bullet, \delta)$ "complejo total" con $I^n := \bigoplus_{i+j=n} I^{i,j}$ y $\delta = d + (-1)^i d'$

Output: $\mathbb{H}^n(X, A^\bullet) := H^n(\Gamma(X, I^\bullet))$ $\left(= \ker(\delta^i)/\mathrm{Im}(\delta^{i-1})\right)$ ← HIPERCOHOMOLOGÍA

⚠ Sup. que $(A^\bullet, d)$ es un COMPLEJO FILTRADO, ie, existe una filtración decreciente
$\cdots \subseteq F^2 A^k \subseteq F^1 A^k \subseteq F^0 A^k = A^k$ tq $d(F^p A^k) \subseteq F^p A^{k+1}$; $F^p A^k = 0$ si $p >> 0$

[Hecho (Ver Deligne): Reemplazando $I^{\bullet,\bullet}$ si fuese necesario, podemos suponer que $F^p I^{\bullet,\bullet}$ es una resolución acíclica de $F^p A^\bullet$]

↳ Si $F^p I^\bullet$ complejo total de $F^p I^{\bullet,\bullet}$, entonces $F^p I^\bullet \subseteq I^\bullet$ induce

$$\mathbb{H}^n(X, F^p A^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^n(X, A^\bullet)$$

Output: $F^p \mathbb{H}^n(X, A^\bullet) := \operatorname{Im}\left(\mathbb{H}^n(X, F^p A^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^n(X, A^\bullet)\right)$ filtración!

"Sucesión espectral"

[Teorema (Deligne): Existen complejos $(E_r^{p,q}, d_r)_{r \in \mathbb{N}}$ con $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ tq

1. $E_0^{p,q} = \Gamma(X, Gr_F^p I^{p+q}) := \Gamma(X, F^p I^{p+q} / F^{p+1} I^{p+q})$ y d_0 inducido por δ.
2. $E_{r+1}^{p,q} \simeq$ cohom. de $(E_r^{p,q}, d_r)$ $= \ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}) / \operatorname{Im}(d_r : E^{p-r,q+r-1} \to E^{p,q})$
3. Para $p+q$ fijo y $\forall r >> 0$, $E_r^{p+q} \cong Gr_F^p \mathbb{H}^{p+q}(X, A^\bullet) =: E_\infty^{p,q}$]

"converge"

Notación: "$E_0^{p,q} = \Gamma(X, Gr_F^p I^{p+q}) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, A^\bullet) =: E_\infty^{p+q}$"

Obs: Decimos que $(A^\bullet, F)$ DEGENERA en E_{r_0} si $d_k = 0 \ \forall k \geq r_0$
En tal caso, $E_{r_0}^{p,q} = E_\infty^{p,q} = Gr_F^p \mathbb{H}^{p+q}(X, A^\bullet)$

Pregunta: ¿Y la Teoría de Hodge?

Sea X compleja (compacta) y consideremos $(\Omega_X^\bullet, \partial)$ con filtración

$$F^p \Omega_X^\bullet := \Omega_X^{\geq p} = 0 \to \dots \to 0 \to \Omega_X^p \xrightarrow{\partial} \Omega_X^{p+1} \to \dots \to \Omega_X^{\dim X} \simeq \omega_X \to 0$$

El complejo $(\Omega_X^\bullet, \partial)$ admite una resolución acíclica $(A_X^{p,q}, \partial, (-1)^p \bar\partial)_{p,q\geq 0}$,
donde $A_X^{p,q}$ haz de formas (p,q) $\left(\ni \eta \overset{loc}{=} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar z_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z_{j_q} \right)$

$\rightsquigarrow$ Complejo total: $(A_X^\bullet, d = \partial + \bar\partial)$ de de Rham!

$\rightsquigarrow$ $F^p \Omega_X^\bullet$ induce $F^p A_X^k := \bigoplus_{\substack{i \geq p \\ i+j=k}} A_X^{i,j}$ $\rightsquigarrow$ de Rham: $\mathbb{H}^n(X, \Omega_X^\bullet) \cong H^n(X, \mathbb{C})$

Como antes, obtenemos $F^p \mathbb{H}^n(X, \Omega_X^\bullet)$ y definimos $F^p H^n(X, \mathbb{C}) := F^p \mathbb{H}^n(X, \Omega_X^\bullet)$

Abstract Nonsense $\rightsquigarrow$ $E_0^{p,q} = \Gamma(X, A_X^{p,q}) \Rightarrow Gr_F^p \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega_X^\bullet) = \dfrac{F^p H^{p+q}(X, \mathbb{C})}{F^{p+1} H^{p+q}(X, \mathbb{C})}$ "FLÖLICHER"

Dolbeault $\hookrightarrow$ $E_1^{p,q} \cong H^q(X, \Omega_X^p)$

Teorema (Frölicher 1955): Si X Kähler compacta, la sucesión espectral anterior degenera en E_1.

Consecuencia: $E_1^{p,q} \simeq H^q(X, \Omega_X^p) \simeq E_\infty^{p,q} \simeq Gr_F^p \mathbb{H}^q(X, \Omega_X^\bullet) = \dfrac{F^p H^{p+q}(X,\mathbb{C})}{F^{p+1} H^{p+q}(X,\mathbb{C})}$

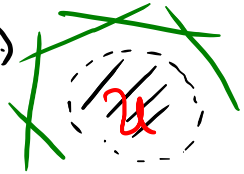
$\overset{dg}{\Longrightarrow} H^n(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega_X^p)$ ← Menos preciso que Hodge, pero buen reemplazo!

Caso particular importante: Sup. que $(A^\bullet, d)$ es un COMPLEJO BIFILTRADO, i.e., $\exists$ filtraciones $F^\bullet A^k$ (decreciente) y $W_\bullet A^k$ (creciente) compatibles con d
$\rightsquigarrow$ Output: Filtraciones $F^\bullet$ y $W_\bullet$ inducidas en $\mathbb{H}^n(X, A^\bullet)$

Mejor escenario posible: $(\mathbb{H}^n(X, A^\bullet), W_\bullet, F^\bullet)$ es una Estr. de Hodge Mixta (en part. $\exists$ $(A^\bullet_{\mathbb{Q}}, W_\bullet)$ subyacente) y además $(Gr_K^W A^\bullet, F)$ degenera en E_1.

Decimos que $(A^\bullet, W_\bullet, F^\bullet)$ es un COMPLEJO DE HODGE MIXTO ← Muchas MHS se construyen así!

Ejemplo concreto: $\mathcal{U} \xhookrightarrow{\text{abierto}} X$ ← var proy suave, con $D = X \setminus \mathcal{U}$ divisor SNC (cruces simples n.)



$\rightsquigarrow \Omega^r_X(\log D)$ haz de r-formas dif. con polos logarítmicos en D

loc: $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_m}{z_m} \wedge \eta$, $D \underset{loc}{=} \{z_1 \cdots z_k = 0\}$, $m \leq r$, $\eta \in \Omega^{m-r}_X$

$D \underset{loc}{=} \{z_1 \cdots z_k = 0\}$

$\rightsquigarrow (\Omega^\bullet_X(\log D), d)$ complejo que cumple

$$\mathbb{H}^n(X, \Omega^\bullet_X(\log D)) \cong H^n(\mathcal{U}, \mathbb{C})$$ ← Atiyah-Hodge-Deligne

$D(m)$: unión de las intersec. de m componentes locales de D

⚠ Hay dos filtraciones en $\Omega^\bullet_X(\log D)$ dadas por:

$$W_k \Omega^r_X(\log D) := \begin{cases} \Omega^r_X(\log D) & \text{si } k \geq r \\ \Omega^{r-k}_X \wedge \Omega^k_X(\log D) & \text{si } 0 \leq k \leq r \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}, \quad F^p \Omega^r_X(\log D) := \begin{cases} \Omega^r_X(\log D) & \text{si } r \geq p \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Deligne (T. de Hodge II): $(\Omega^\bullet_X(\log D), W_\bullet, F^\bullet)$ es un complejo de Hodge mixto, i.e., induce una Estructura de Hodge Mixta en $\mathbb{H}^n(X, \Omega^\bullet_X(\log D)) \cong H^n(\mathcal{U}, \mathbb{C})$!

Mejor aún: 1° $E_1^{p,q} = {}_F E_1^{p,q} \cong H^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ degenera en E_1.

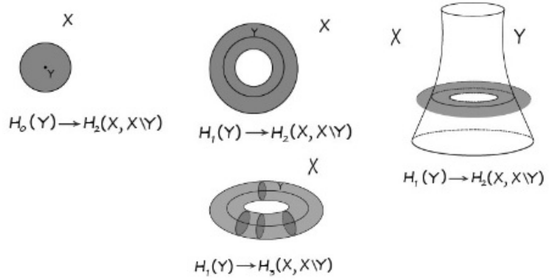
2° $E_1^{-m, m+k} = \mathbb{H}^k(X, Gr^W_m A^\bullet_{\mathbb{Q}}) \cong H^{k-m}(D(m), \mathbb{Q})$ y degenera en E_2.

Eg: Si $\dim(X)=2$, entonces E_1 (con $E_1^{-m,l} \cong H^{l-2m}(D(m),\mathbb{Q})$) luce así:

d_1: Leray - Thom - Gysin

$H_{m-c}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_m(X, X\setminus Y, \mathbb{Z})$

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^0(D(2),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & H^2(D(1),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & H^4(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & 0 \\
0 & \xrightarrow{d_1} & H^1(D(1),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & H^3(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & 0 \\
0 & \xrightarrow{d_1} & H^0(D(1),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & H^2(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & 0 \\
0 & \xrightarrow{d_1} & 0 & \xrightarrow{d_1} & H^1(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & 0 \\
0 & \xrightarrow{d_1} & 0 & \xrightarrow{d_1} & H^0(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{d_1} & 0
\end{array}
$$

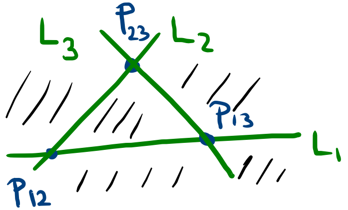


$E_2 = E_\infty$

$\rightsquigarrow \mathrm{Gr}^W_{m+k} H^k(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \cong \text{Cohomología}\left[H^{k-m-2}(D(m+1),\mathbb{Q}) \xrightarrow{d_1} H^{k-m}(D(m),\mathbb{Q}) \xrightarrow{d_1} H^{k-m+2}(D(m-1),\mathbb{Q})\right]$

Aún más concreto:

$X = \mathbb{P}^2$



$\mathcal{U} := \mathbb{P}^2 \setminus \{L_1 \cup L_2 \cup L_3\}$, $L_i \simeq \mathbb{P}^1$

$D(1) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $D(2) = P_{12} \cup P_{13} \cup P_{23}$

$(k=0)$ $\rightsquigarrow H^0(\mathcal{U},\mathbb{Q})$: $\mathrm{Gr}^W_0 \simeq H^0(D(0),\mathbb{Q}) \simeq H^0(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, $\mathrm{Gr}^W_k = 0$ si $k \neq 0$

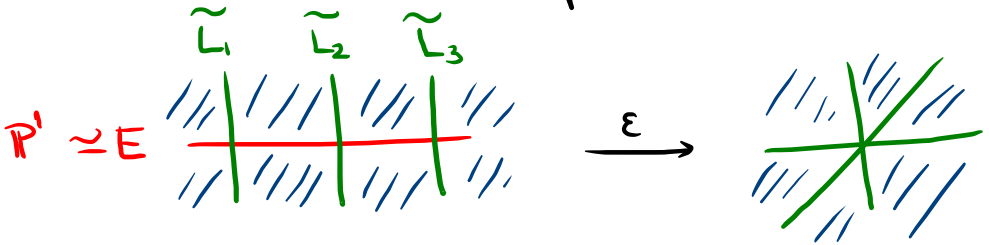
$(k=1)$ $\rightsquigarrow H^1(\mathcal{U},\mathbb{Q})$: $\mathrm{Gr}^W_1 \simeq H^1(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})/\mathrm{Im}(d_1) = 0$; $\mathrm{Gr}^W_2 \simeq \ker\left[H^0(D(1),\mathbb{Q}) \to H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})\right] \cong \mathbb{Q}^2$

Similar: $\mathrm{Gr}^W_2 H^2(\mathcal{U},\mathbb{Q}) = \mathrm{Gr}^W_3 H^2(\mathcal{U},\mathbb{Q}) = 0$, $\mathrm{Gr}^W_4 H^2(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, $H^3(\mathcal{U},\mathbb{Q}) = H^4(\mathcal{U},\mathbb{Q}) = 0$

Observaciones:

a) La sucesión espectral ① (i.e., $E_1^{p,q} \cong H^q(X, \Omega_X^p(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$) también da información interesante $\rightsquigarrow$ Teorema de la base de Griffiths

b) Si se considera el complemento de 3 rectas en $\mathbb{P}^2$ que <u>no</u> son SNC



$\mathcal{U} = \mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$

Consideramos el blow-up y realizamos el cálculo en $\mathcal{U} \cong Bl_p(\mathbb{P}^2) \setminus E$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $H^i(\mathcal{U}, \mathbb{Q}) = 0 \ \forall i \geq 2$, $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Q})$ pura de peso 2, y $H^0(\mathcal{U}, \mathbb{Q})$ pura de peso 0.

$\rightsquigarrow$ La misma idea (+ Hironaka) permite analizar el caso singular.