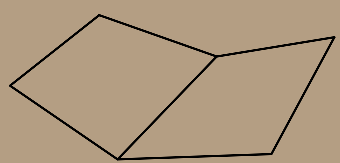
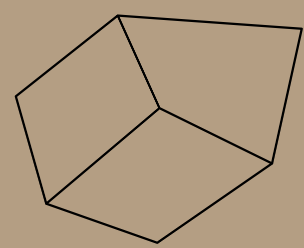
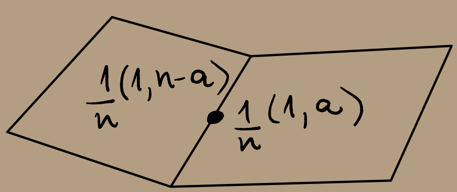
SNC

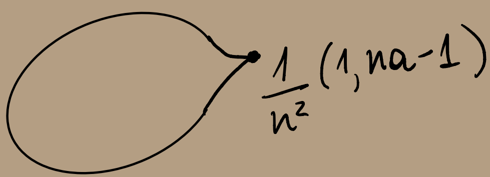




vs

KAWAMATA





SGA 5 Hodge

18/Mayo/21

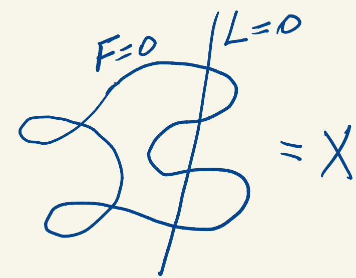
Degeneraciones Permisivas y Moderadas

Y. Kawamata "Moderate degenerations of algebraic surfaces"
Springer LNM 1507 (1992).

<u>Def</u>: Sea X una variedad proyectiva no necesariamente irreducible.
Sea $\mathbb{D} = \{ t \in \mathbb{C} \ : \ |t| < 1 \}$ [interesa solo el germen]

Una <u>suavización</u> de X es un morfismo propio sobreyectivo $(X \subset \mathcal{X}) \longrightarrow (0 \in \mathbb{D})$ tal que las fibras son reducidas : $X_0 \simeq X$, X_t suave si $t \neq 0$ y $\mathcal{X}$ es una variedad irreducible.

<u>Ej</u>: Suavización de la curva plana unión de cuártica con 2 nodos y una recta.



Considerar el pencil $X_t = \{ F \cdot L + t \cdot F_5 = 0 \}$ $t \in \mathbb{D}$

donde $\{F_5 = 0\}$ es suave y general.

Resolver los 25 puntos base y obtener $\mathfrak{X} \subset Bl_{25}(\mathbb{P}^2)$.

★ Si partimos con otras singularidades y/o multiplicidades, podemos (salvo resolver sing. de curvas y cambios de base) obtener una suavización con solo cruces simples normales como fibra central que reemplaza a X.

[se le llama reducción semi-estable]

$$X_t \rightsquigarrow \tilde{X}_t \rightsquigarrow X_t^{ss} \rightsquigarrow X_t^{s}$$

reducción en ambiente $\mathfrak{X}$ suave — modelo minimal — modelo canónico

(1) Para curvas super bien! $\dim \geq 2$ muy complicado.

(2) Se desea $\tilde{X}_t$ pero es complicado y no único.

(3) Kawamata: Podemos siempre esperar a X_t^{ss} en para $\dim = 2$ y se parece mucho a $\tilde{X}_t$ (y suele ser único).

obs: Esto es previo al modelo canónico (cuando se puede) Kollár - Shepherd-Baron - Alexeev.

Def/Pr (Singularidad cíclica) Fijar $r \geq 2$ entero y $0 < a_1, \ldots, a_d$ enteros. Considerar $(t_1, \ldots, t_d) \longmapsto (\zeta^{a_1} t_1, \ldots, \zeta^{a_d} t_d)$ acción de $\mathbb{Z}/r$ sobre $\mathbb{C}^d$. (ζ = raíz prim r-ésima de 1)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}/r \ni (0, \ldots, 0) \text{ es la sing tipo } \frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_d).$$

Def.- Sea $X \subset \mathfrak{X}$ una suavización, donde $\mathfrak{X}$ es 3-fold.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Tendremos 3 comportamientos locales <u>Permisibles</u> :

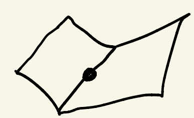
(SNC) $\{xy = t\} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_t$ o $\{xyz = t\} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_t$.

(Wahl) $\{xy = z^n + t\} \subset \frac{1}{n}(1,-1,a) \times \mathbb{C}_t$

donde en $t=0$ tenemos la sing de Wahl $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$, con $\mathrm{mcd}(a,n) = 1$.

[Para el espacio de deform. de $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$ mirar Hacking Prokhorov 2010]

(orbifold double NC) $\{xy = t\} \subset \frac{1}{n}(1,-1,a) \times \mathbb{C}_t$

donde en $t=0$ tenemos dos superficies con  $\frac{1}{n}(1,a)$ y/o $\frac{1}{n}(1,n-a)$.

<u>Moderado</u> : Solo tener Wahl y así una degeneración normal

Todo aquí es Terminal para $\mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \supset X \arrow[rr, dashed, bend left] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & Y \arrow[d, phantom, "\subset"] \\
 & \mathcal{Y} \arrow[dl] & \mathcal{Y} \arrow[dll] \\
\mathbb{D} \ni 0 & &
\end{tikzcd}$$

<u>Theorem</u> (Kawamata, varios otros [Flip, flops, MM, etc por Kollár, 3.4.2])

Sea $f:(X\subset \mathcal{X}) \longrightarrow (0\in \mathbb{D})$ suavización, $\mathcal{X}$ 3-fold suave.
Asumir fibras $t\neq 0$ son <u>no</u> reglados.

[A través del teorema de reducción semiestable podemos salvo cambio de base obtener tal f de toda degeneración de superficies]

Entonces existe entero positivo m y degeneración permisible $g:(Y\subset \mathcal{Y}) \longrightarrow (0\in\mathbb{D})$ tal que:

(1) g es birracionalmente equivalente sobre $\mathbb{D}$ a $f_m:\mathcal{X}_m\to\mathbb{D}$ que se obtiene por cambio de base de f por $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, $z\mapsto z^m$.

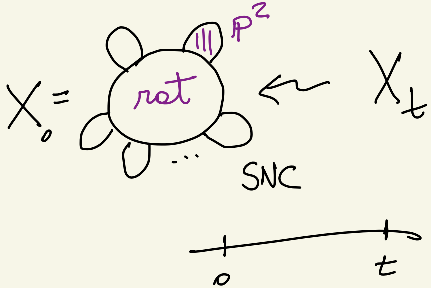
[Creería que en nuestro caso reducido esto no es necesario]

(2) $g^{-1}(t)$, $t\neq 0$, son sup. suaves proyectivas minimales
$g^{-1}(0)$ es reducida, proyectiva, comp. irreducibles normales $\mathbb{Q}$-Cartier

(3) $K_{\mathcal{Y}}$ es g-nef, i.e., $K_{\mathcal{Y}}\cdot C\geq 0$ $\forall C$ curva tal que $g(C)$ es pto.

Ej: (El florero de Persson) Superficies de Enriques

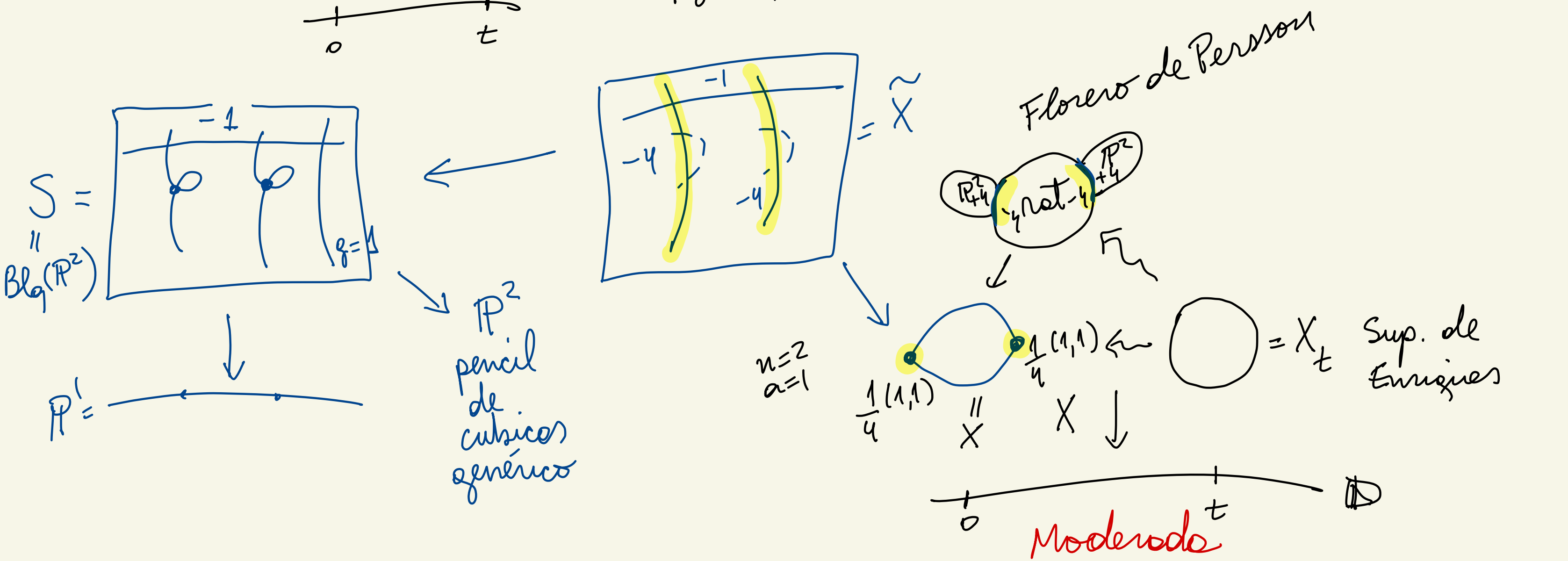
"flower pot"



$\leftarrow X_t =$ Superficie de Enriques

$2K_{X_t} \sim 0$

$p_g = q = 0$



§2. Topología de los moderados.

(1) La fibra de Milnor en la situación moderada.

En este caso, $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}/n$, $H_2(M,\mathbb{Z}) = 0$.

(2) X con sólo singularidades $\frac{1}{d_i n_i^2}(1, d_i n_i a_i - 1)$ con $0 < a_i < n_i$ coprimos, r sings.

$$K_X^2 + e(X) + \sum_{i=1}^{r} (d_i - 1) = 12\,\chi(\mathcal{O}_X).$$

En una suavización moderada, K^2, e, p_g, q, χ son constantes.

(3) Si $(X \subset \mathcal{X}) \to (0 \in \mathbb{D})$ es moderada, entonces consideramos $\tilde{\Omega}^p_X$ como el doble dual de Ω^p_X. Así $\tilde{\Omega}^2_X$ es el haz dualizante.

Sus grupos de cohomología con coef. en $\mathbb{Q}$ satisfacen dualidad de Poincaré.

Tenemos $E_1^{p,q} = H^q(X, \tilde{\Omega}^p_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ degenera en E_1
y hay dualidad de Hodge entre $H^q(X, \tilde{\Omega}^p_X)$ y $H^p(X, \tilde{\Omega}^q_X)$.

Al tomar $\tilde{\Omega}^p_{\mathcal{X}|\Delta}$, entonces
(1) $\tilde{\Omega}^p_{\mathcal{X}|\Delta} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_X \simeq \tilde{\Omega}^p_X \quad \forall p \geq 0$. (2) $\tilde{\Omega}^2_{\mathcal{X}|\Delta}$ es dualizante, etc.

(4) Sean

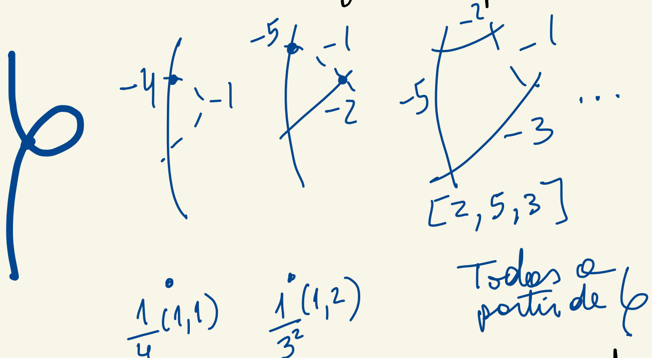
$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\text{contraer toda (-1)-curva}"'] \arrow[dr, "\text{resolución}"] & & \\ S & & X = X_0 & X_t \text{ (moderada)} \arrow[l, squiggly] \end{tikzcd}$$

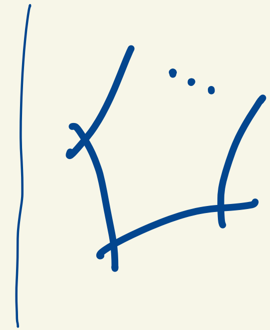
$\Rightarrow h^p(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_t}) = h^p(\mathcal{O}_S) \ \forall p$ y si f <u>no</u> es suave
y $K_{\mathcal{X}}$ es f-neg $\Rightarrow \exists\, m_1, m_2$ positivos tal que
$|mK_X|$ libre y $P_m(\mathcal{X}_t) > P_m(S) \quad \forall t \neq 0, \ \forall m$
con $m_1 \mid m$ y $m_2 \mid m$.

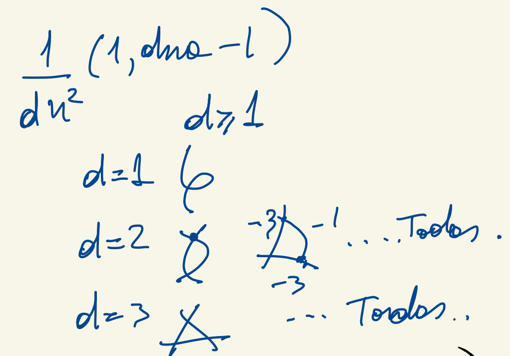
[Explicar la Herarquía: tipo general $\Rightarrow K^2$ bajo
o κ bajo, etc]

§3 Superficies elípticas singulares.

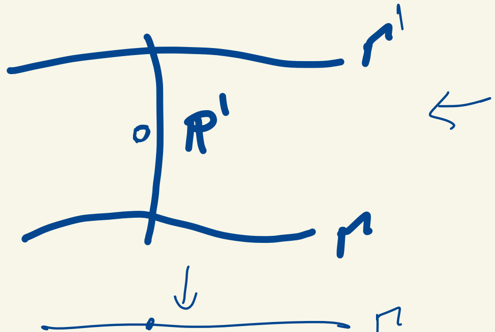
(1) Naturaleza elíptica de las T-singularidades.

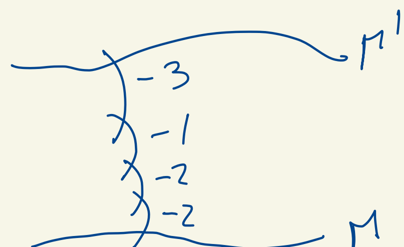


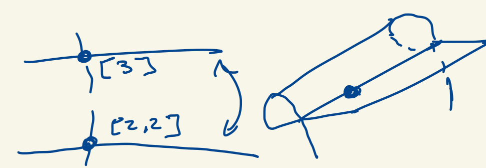




(2) Como construir orbifold doble NC a partir de $\mathbb{P}_\Gamma(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})$.







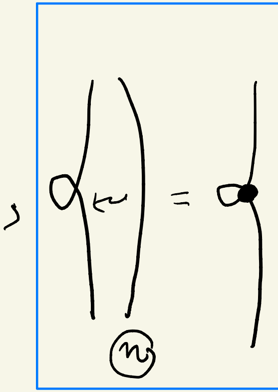
[3] dual con [2,2]

$\frac{1}{3}(1,1)$ $\frac{1}{3}(1,2)$

§4. Degeneraciones minimales moderadas.

(1) $\kappa = 0$: $(X \subset \mathcal{X}) \xrightarrow{f} (0 \in \mathbb{D})$ moderada con qlhe $\kappa(X_t) = 0$ $t \neq 0$ y minimal

$\Rightarrow$ f es suave salvo en el caso del florero, donde solo podemos tener $\frac{1}{4}(1,1)$, X_t es Enriques, X es racional.



(2) $\kappa = 1$: [Esto vale una tesis de Magister]

Listar los casos y la fórmula canónica.

(3) $\kappa = 2$: [Esto vale tesis de doctorado si se va más allá]

Prop : $(X \subset \mathcal{X}) \xrightarrow{f} (0 \in \mathbb{D})$ degeneración moderada minimal con $\kappa(f^{-1}(t \neq 0)) = 2$.

Asumir (1) $K^2 = 3e$ o (2) $2p_g - 4 = K^2$ y $\kappa(S) = 2$

$\Rightarrow$ f es suave.

$K_X^2 \leq 3\, e_{orb}(X) < 3\, e(X)$
sing.

pero $K^2 - 3e$ es constante

la desigualdad de Noether

$2p_g(S) - 4 \leq K_S^2 < K_{X_t}^2 = 2p_g - 4$

[Debe ser elíptica, etc]