Haikaiwas

[by Jonny Evans]

Hori 1-2-3-...

26/Abril/2022

Eiji Horikawa:

«Algebraic surfaces of general type with small c_1^2» I Ann. of Math. 1976
II inv 1976, III inv 1978, IV inv 1978, V Tokyo 1981.

X = superficie proy. nosingular $|_{\mathbb{C}}$, K_X nef y big

$\chi(\mathcal{O}_X)$ = Caract. Euler de $\mathcal{O}_X$ $= 1 - q(X) + p_g(X)$

$q(X) = h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\Omega^1_X)$, $p_g(X) = h^0(\Omega^2_X)$

$c_2(X)$ = Caract. Euler topo. de $X > 0$

$c_1^2(X) = K_X^2 > 0$

Fórmula de Noether: $12\,\chi(\mathcal{O}_X) = c_1^2(X) + c_2(X)$

Desigualdad de Noether: $5c_1^2(X) - c_2(X) + 36 \geq 12\, q(X)$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{2p_g(X) - 4 \leq c_1^2(X)}$

$H^2(X,\mathbb{Z})$ tiene forma intersección unimodular S_X (ie det $= \pm 1$)

(b^+, b^-) signat.

$\sigma = b^+ - b^-$

$b^+ = 2p_g + 1$

$b_2 = \text{rango}(H^2(X))$

Hirzebruch: $\sigma = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)$

S_X tiene paridad

Recuerdo geografía:

$$c_1^2 > 0 \ , c_2 > 0 \ , \ c_1^2 + c_2 \equiv 0 \, (12) \ , \ \frac{1}{5}(c_2 - 36) \leq c_1^2 \leq 3c_2$$

simple $\longrightarrow$ complicado

Def: Una superficie de Horikawa es una superficie minimal, tipo general tal que $2p_g - 4 = c_1^2$.

[Así $p_g \geq 3$; Se puede mostrar que $\pi_1(\text{Hori}) = \{1\}$]

$$\therefore \quad c_1^2(X) = 2p_g - 4 \qquad c_2(X) = 10p_g + 16$$

$$b_2 = c_2(X) - 2 = 10p_g + 14 \qquad b^+ = 2p_g + 1 \qquad b^- = 8p_g + 13$$

$$\sigma = -6p_g - 12 = -6(p_g + 2) \ [\neq \pm 8(8p_g + 13)]$$

S_X es par/impar, $b_2 = 10p_g + 14$, $\sigma = -6(p_g + 2)$

$\Rightarrow$ (Freedman) el tipo topológico está determinado.

$$\Big[\underset{\text{homeo orientado}}{X \simeq} \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2}_{b^+} \# \underbrace{\overline{\mathbb{P}}^2 \# \cdots \# \overline{\mathbb{P}}^2}_{b^-} \Big] \qquad \underset{\text{isometría}}{S_X \simeq} b^+\langle +1 \rangle \oplus b^-\langle -1 \rangle \ \text{(impar)}$$

$b^+ \geq 2$ no tiene ni siquiera estructura casi compleja, si tiene estructura diff.

o $\quad S_X \simeq pH \oplus q \pm E_8$ (par), $\sigma = \pm 8q$, $b^- = 8q + p$ $\quad b^+ = p$

$q = \frac{3}{4}(p_g + 2)$

$[K3 \Rightarrow S_{K3} \simeq -2E_8 \oplus 3H]$

Ej.- Los superficies de Barlow son simplemente conexas tipo general minimales con $p_g = q = 0$.

S impar, $b^+ = 1$, $K^2 = 1$ $\quad X \underset{\text{homeo orient}}{\simeq} \mathbb{P}^2 \# 8\overline{\mathbb{P}}^2$

Pero un Teo grande dice que entre superficies alg un difeo $\Rightarrow$ dim Kodaira igual.

$\therefore$ X es exótico en relación a $\mathbb{P}^2 \# 8\overline{\mathbb{P}}^2$.

<u>Teorema</u> (Horikawa) Es posible describirlos todos y su moduli, diferenciando entre componentes y conectando entre ellos por deformaciones.

- $8 \nmid K^2 \Rightarrow$ dos Horikawas son equivalentes bajo deformaciones. [Pueden pasar por distintas componentes]

  $\Rightarrow$ Son todos difeo.

- $K^2 = 8k$, $k \geq 2$ $\Rightarrow$ 2 clases de deformación $\begin{cases} d \leq 2k \\ d = 2k+2 \end{cases}$ y

  (k impar) se distinguen por S_X impar $d \leq 2k$ y par $d = 2k+2$.
  $\Rightarrow$ no son homeo.

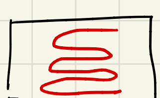
  (k par) $\Rightarrow$ todos son homeo.

Problema Famoso : $K^2 = 16\ell$, $p_g = 8\ell + 2$

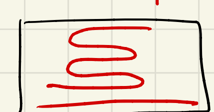
(parte con Horikawa 1976)

Todos los inv. difeo son iguales y no sabemos si son difeomorfos.

$\ell = 1$: $K^2 = 16$, $p_g = 10$

$X_1 \xrightarrow{2:1}$  $= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$B \in (6,12)$

$X_2 \xrightarrow{2:1}$  $= \mathbb{F}_6$

Γ

Δ_0

$B = \Gamma + \Delta_0 \in 5(\Delta_0 + 6F) + \Delta_0$

La pregunta $X_1 \simeq X_2$ difeo? algunos la consideran como pregunta fundamental en topología 4-dim.

La idea será explicar como atacar el problema a través de degeneraciones de X_1 y X_2.

__Teo__ (Manetti 2001) Sean S_1, S_2 dos superficies compactas complejas las cuales son equivalentes por T-deformaciones $\Rightarrow S_1 \simeq S_2$ difeo (oriented).

Martes 3/Mayo

§1. Construcción Horikawa y cubrimientos dobles.

Sea X Horikawa $\Rightarrow |K_X|$ no tiene puntos base (Horikawa)

$\Rightarrow \varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $n = p_g - 1$, de grado 2 cuya imagen una superficie W con $gr(W) = n-1$.

[Tenemos $\deg(W) \cdot \deg f = K^2 = 2n-2$. Horikawa muestra que $C \in |K_X|$ general es una curva hipelíptica suave $\Rightarrow f|_C$ no es trivial y así $\deg(f) \geq 2$

Por otro lado, como W no está contenido en hiperplano
$\Rightarrow \deg(W) \geq n-1$

$\therefore \deg f = 2$ y $\deg(W) = n-1$.]

$$W = \underbrace{\mathbb{P}^2, \text{ veronese } \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5}_{\text{tipo } \infty}, \underbrace{\mathbb{F}_d}_{\text{tipo } d}, \underbrace{\overline{\mathbb{F}_d}}_{\text{tipo } d'}$$

∞ y d' no muy interesantes: $p_g = 3, 4, 5, 6$ en esos.

(Tipo d) $n \geq 3$ y $W = \mathbb{F}_d$ con $n-d-3 \geq 0$ y por y $n-2d+3 \geq 0$.

$F \subset$ fibra, $\cup$ Δ_0 tq $\Delta_0^2 = -d$

Si $\varphi_K : X \xrightarrow{2:1} W \Rightarrow$ curva branch $B \sim 6\Delta_0 + (n+3d+3)F$.

B ∩ divisor reducido

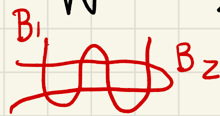
$d \leq \frac{n+3}{3} \Rightarrow B$ genérica es suave e irreducible

$\frac{n+3}{3} < d \leq \frac{n+3}{2} \Rightarrow B$ genérica es $\Delta_0 + B_0$, B_0 suave irreducible
$B_0 \cdot \Delta_0 = n+3-2d$

Cubrimientos dobles : W suave $\supset B = B_1 + \dots + B_r$ divisor SNC

$\exists\ X \xrightarrow[2:1]{f} W \Longleftarrow$ $\boxed{\text{Asumir } B \sim 2D,\ D \in \mathrm{Pic}(W)}$

X = normal y nodos sobre nodos



$\mathcal{O}(-2D) \simeq \mathcal{O}(-B) \subset \mathcal{O}$

ie mult. para el $\mathcal{O}_W$-álgebra

$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-D) = \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{A}) \longrightarrow W$

Si $\bar{\mathcal{A}}$ es su normalización $\Rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_W}(\bar{\mathcal{A}}) \to \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{A}) \to W$

pero como B reducido $\Rightarrow \bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow X' \xrightarrow{f} W$ finito grado 2

y $f_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-D) \Rightarrow$ cálculo de muchos invariantes.

ejemplos

1,1	
2,1	
2,2	

$(x,t) \mapsto (x, t^2, tx)$

Finalmente resolución de nodos: $X \xrightarrow{f} W$ genéricamente $2:1$

$-2 \cup \dots \mapsto p_1$

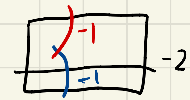
$\vdots$

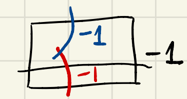
$-2 \dots \mapsto p_r$ } nodos de B.

{resolución del branch}

[para p subrecubrimientos con p primo mirar §2. p-th root covers en "Arrangements of curves and alg. surfaces"]

§2. Superficies de (Segre-)Hirzebruch.





$$\cdots \to \mathbb{F}_n \leftarrow \cdots \to \mathbb{F}_2 \leftarrow \cdot \to \mathbb{F}_1 \leftarrow \cdot \to \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, \qquad \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$$

$\mathbb{F}_n \supset \Delta_0$ única con $\Delta_0^2 < 0$, $\Delta_0^2 = -n$

$h^0(T_{\mathbb{F}_n}) = n+5$
$h^1(T_{\mathbb{F}_n}) = n-1$
$h^2(T_{\mathbb{F}_n}) = 0$

De esta forma $\mathbb{F}_n \underset{\text{birregular}}{\simeq} \mathbb{F}_m \iff n = m$.

$e(\mathbb{F}_n) = 4$

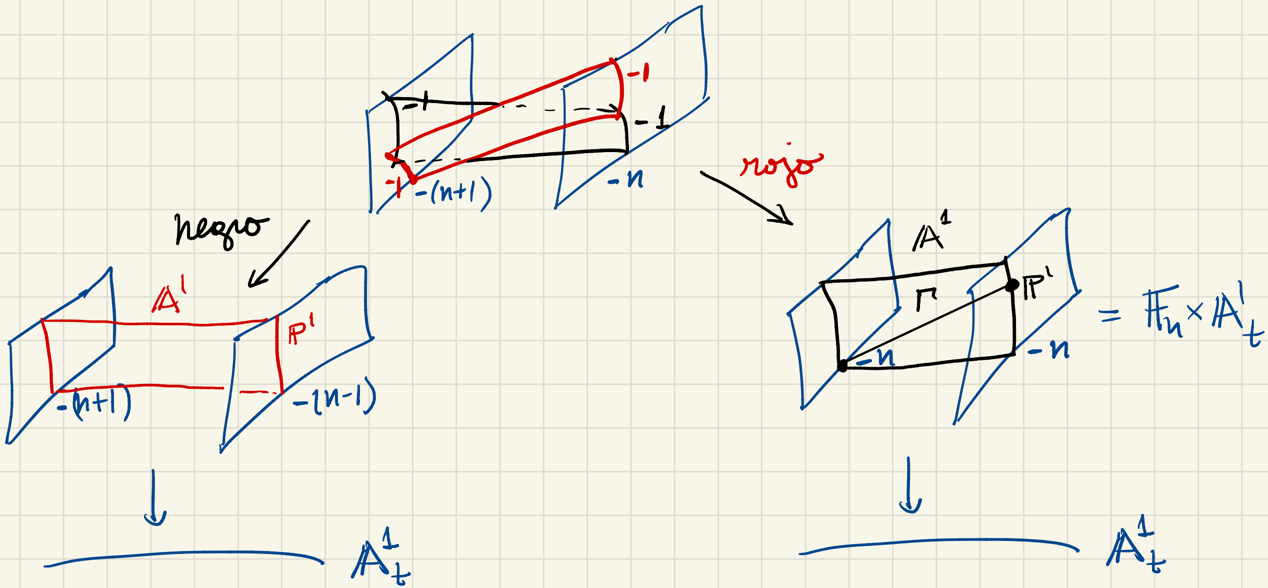
$K^2_{\mathbb{F}_n} = 8$

$K_{\mathbb{F}_n} \sim -2\Delta_0 - (2+n)F$

$S_X = \begin{bmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si $n = 2k \Rightarrow (\Delta_0 - kF)^2 = 0$ y $S_X \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ lo cual es par

$n = 2k+1 \Rightarrow S_X$ impar y $(\Delta_0 + kF)^2 = -1 \Rightarrow S_X \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \mathbb{F}_n \underset{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{F}_m \iff$ misma paridad (en efecto serán difeo)



es decir, $\mathbb{F}_{n-1} \rightsquigarrow \mathbb{F}_{n+1}$.

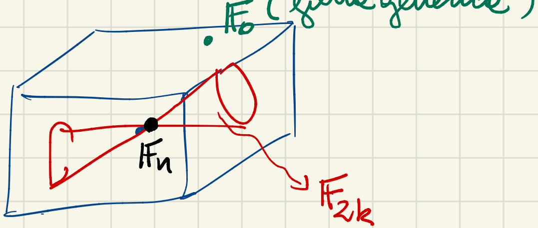
Tenemos una familia $\mathcal{F}_n \longrightarrow B = \mathbb{C}^{n-1}$ pero no es un "moduli" local como en el caso de sup. de tipo general.

[Catanese 1984, descripción de $\mathcal{F}_n \to B$]

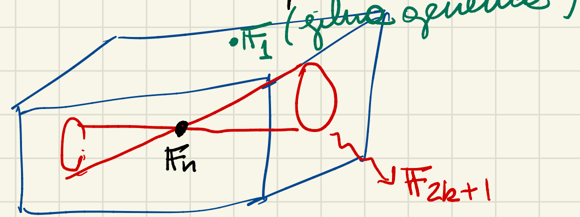
Teorema: Para $\frac{n}{2} \leq m \leq n$, existen conos algebraicos $B_m \subset \mathbb{C}^{n-1} = B$ de dimensión $\min\{n-1, 2(n-m)\}$ tq $B = B_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \supset \dots \supset B_n = 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$

y $B_m - B_{m+1} = \{b \in \mathbb{C}^{n-1} : \text{fibra en } b = \mathbb{F}_{2m-n}\}$.

n = par



n = impar



obs$\rfloor$ $\mathbb{F}_{n-2} \rightsquigarrow \mathbb{F}_n \Rightarrow \underbrace{F \rightsquigarrow F \quad \Delta_0 \rightsquigarrow \Delta_0 + F}_{(*)}$ (simplemente intersectar con F y con K)

(como lo hicimos antes)

A nosotros nos interesan los Horikawas con $K^2 = 16\ell$
($\Rightarrow$ así $p_g = 8\ell+2$) y en este caso:

$$f : X \xrightarrow{2:1} \mathbb{F}_d \quad \text{con} \quad 0 \leq d \leq 4\ell+2$$
$$\cup$$
$$B \in |6\Delta_0 + (8\ell+3d+4)F|$$

$0 \leq d \leq \frac{4(2\ell+1)}{3}$
B irreducible suave

(genérico)

$\frac{4}{3}(2\ell+1) < d \leq 4\ell+2$
$\Delta_0 + B_0 = B$
$\uparrow$ suave irred

Notar que $\mathbb{F}_{2k} \rightsquigarrow \mathbb{F}_{2k+2}$ envía un sist. lineal en el otro por (*). Luego esperamos que $B_t \rightsquigarrow B$

Pero: $\Delta_0 . B_0 = 2(4\ell+2-d)$ y así la esperanza existe con $d < 4\ell+2$.

Teo (Horikawa Thm 7.1 Annals) En efecto tenemos 2 componentes deformaciones equivalentes, pero todas son homeomorfas.
(S_X inipar usando $\Delta_0 \subset \mathbb{F}_{4\ell+2} \xleftarrow{f} X \quad f^*(\Delta_0) = 2\Gamma, \Gamma^2 = -2\ell-1$)

III

<u>Pregunta</u>: Hay alguna degeneración interesante a $\mathbb{F}_{4l+2}$ de BC $\mathbb{F}_0$ que nos permita ver un límite estable?

$$\mathcal{M} = \{([x_0,x_1],[y_0,y_1,y_2],t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} : x_0^n y_1 - x_1^n y_0 + t\, x_0^{n-m} \cdot x_1^m \cdot y_2 = 0\}$$

$t=0$, $\mathbb{F}_n$ $\qquad$ $t \neq 0$ $\mathbb{F}_{n-2m}$ (mirar Catanese/Manetti para más).

<u>Lo que viene</u>: Lee-Park hacen funcionar en $l=1$ $\mathbb{F}_0 \rightsquigarrow \mathbb{F}_4$ (o $\mathbb{F}_0 \rightsquigarrow \mathbb{F}_{10}$) tal que existe deg. $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

1. Deformaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein: qué esperar en la fibra especial.
2. La degeneración Lee-Park.
3. Flipeando la degeneración para ver $\mathbb{F}_0 \rightsquigarrow \mathbb{F}_4$ ($\mathbb{F}_{10}$).
4. Otras degeneraciones.
5. Preguntas de super tesis.

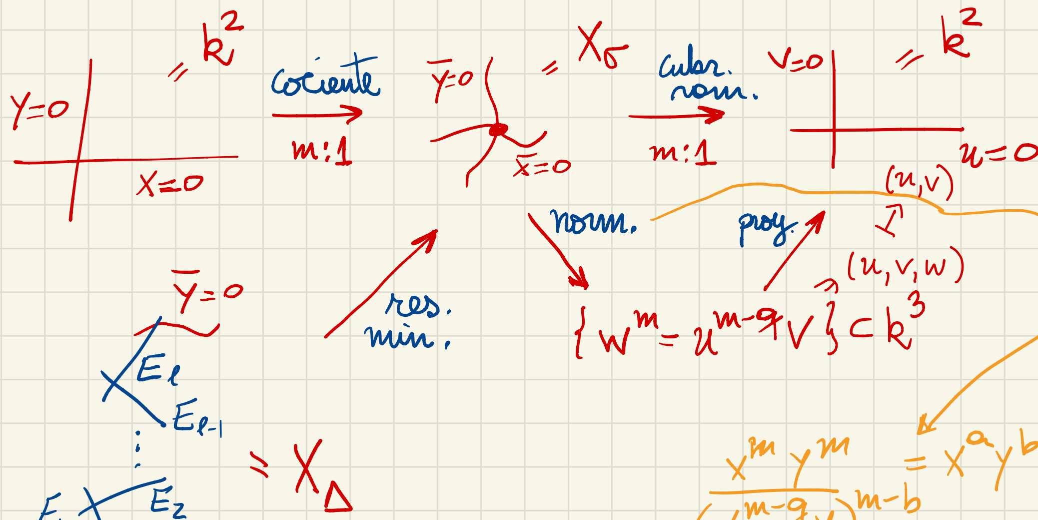
«Rational Blowdowns of smooth 4-manifolds» R. Fintushel, R.J. Stern
J. Diff. Geom. 1997.
«A Construction of Horikawa surface via $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothings»
Y. Lee, J. Park Math. Z. 2011.

93. Sing. cíclicas / Wahl / F-sing.

$$k[x,y] \supset k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \supset k[\underset{\overset{\shortparallel}{u}}{x^m}, \underset{\overset{\shortparallel}{v}}{y^m}, \underset{\overset{\shortparallel}{w}}{x^{m-q}y}] \supset k[\underset{\overset{\shortparallel}{u}}{x^m}, \underset{\overset{\shortparallel}{v}}{y^m}]$$

Se traduce geométricamente en:

$$\boxed{\frac{1}{m}(1,q)}$$



$$\frac{x^m y^m}{(x^{m-q}y)^{m-b}} = x^a y^b \cdot x^{m\lambda} \qquad \lambda \in \mathbb{Z}$$

donde

$$a + qb \equiv 0 \ (m)$$

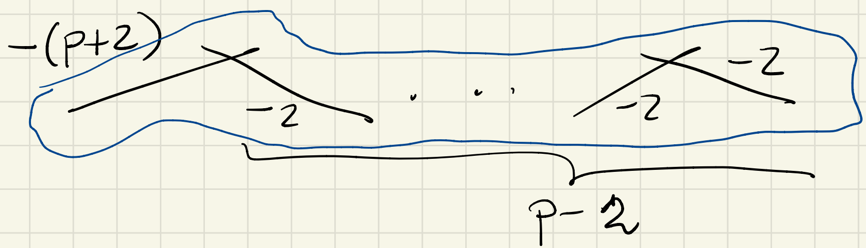
donde $E_i \simeq \mathbb{P}^1_k$, $E_i^2 = -a_i$

y $\dfrac{m}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_\ell}}}$, $a_i \geq 2$.

<u>**Def**</u>.- Una sing. de Wahl es $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ con $\mathrm{mcd}(n,a) = 1$.

Fintushel-Stern introducen el rational blowdown:

(1)



vecindad smooth 4-manifold C_p

(2) El Lens space $L(p^2, 1-p) = \partial C_p$ limita un rational ball B_p con $\pi_1(B_p) = \mathbb{Z}/p$ y $\underbrace{\pi_1(L(p^2, 1-p))}_{\mathbb{Z}/p^2} \twoheadrightarrow \pi_1(B_p)$
$(H_i(B_p, \mathbb{Q}) = 0 \ \forall i > 0)$

(3) Se construye rat. blowdown: Nuevo smooth 4-manifold resultante de la cirugía.
[El nuevo 4-manifold tiene una bien definida C^∞ estructura]

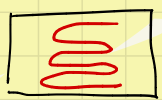
Para nosotros es contraer y suavizar, si se puede globalmente.

<u>Lema</u>: Para $n \geq 4$, $E(n)$ contiene un par de configuraciones C_{n-2} tq u_{n-1} son secciones y $u_j \cdot f = 0$ resto, y el rational blowdown es $H(N)$.
(Horikawa con $K^2 = 2N-6$, $p_g = N-1$)

Demostración produce una Horikawa suave (ie difeo a la Horikawa, que corresponde a F_{N-3} (tipo d) ie $_2$

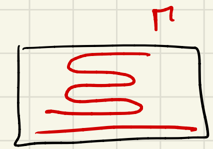
$$H(N) \xrightarrow{2:1} \mathbb{F}_{N-3}$$
$$\cup$$
$$\left(B \in |6\Delta_0 + (4N-8)f| \right).$$

La construcción a continuación es Lee-Park para $K^2 = 16$, $p_g = 10$ $(N=11)$

$X_1 \xrightarrow{2:1}$  $= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$B \in (6,12)$

✓

$X_2 \xrightarrow{2:1}$  $= \mathbb{F}_6$

$B = \Gamma + \Delta_0 \in 5(\Delta_0 + 6F) + \Delta_0$

?

Clave en la identificación está al final del paper en Math. Z.: Sabemos que $H(N)$ pertenece a 1 clase de deformación (la ✓) y suavización o Rat. blowdown producen sup. difeo $\Rightarrow$ suavización es ✓.

Pregunta: ¿Es posible describir el cubr. doble a $\mathbb{F}_0$?

Resp. sí, ya viene.

Paréntesis cool: Considere $E(4)$ con 9 secciones disjuntas (-4)-curvas

Sea W_k = contracción de k de ellas

$\Rightarrow K^2_{W_1} = 1$, $p_g = 3$ y así $\boxed{2p_g(X) - 4 \leq c_1^2(X)}$ muere!

$\underset{2}{\underset{\|}{2p_g(X)-4}} \qquad \underset{1}{\underset{\|}{c_1^2(X)}} \quad \rightarrow\leftarrow$

∴ rat. blowdown produce algo NO algebraico

Pero $K^2_{W_2} = 2$, $p_g = 3$ sí es posible (y Horikawa)

$$\overset{-4}{\text{—}}\ \underset{-4}{\text{—}}\quad E(4) \xrightarrow{2:1} \mathbb{F}_4 \supset B \in |4(\Delta_0 + 4F)| \text{ no sing. irred.}$$

$$\tilde{E}(4) \supset \mathcal{U} \xrightarrow{2:1} \mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{F}_4}$$

Hori $\quad W \xrightarrow{2:1} W \subset \mathbb{P}^2 \quad$ óctica

$\underbrace{4(\Delta_0+4F)}$ Existe cubr. doble

(Minor Ben Authes 2020 estudio

de KSBA Gorenstein)

La construcción de Lee-Park parte con una sección de $|4(\Delta_0+NF)|$ para nosotros $N=11$.

→ ver construcción según las otras notas.

→ Preparar para el flip.

→ ¿Qué podemos hacer en el segundo caso?

<u>Lema</u>: Si $X_t \rightsquigarrow \underset{\text{wahl sing}}{W}$ con X_t Horikawa $\left(K_{X_t}^2 = K_W^2 = 2p_g - 4 \text{ y } p_g \geq 3\right)$

$\Rightarrow$ la resolución minimal de W tiene radio $= 1$. Más aun:

(1) Explicar blow-ups.

(2) Explicar cota: Si hay 1 sing, tenemos largo $\leq 4(2p_g-4)-1$.

(" " muchos $\Rightarrow$ lo mismo por Evans-Smith)

(3) Posición de las configuraciones.