Intro GA

16/3/21

Motivación

“Parametrizar es lindo pero casi nunca se puede”

k = cuerpo $\quad (\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \ \mathbb{F}_p, \ \overline{\mathbb{F}_p}, \ \mathbb{C}(t), \dots)$

Dado $\{(x,y) \in k^2 : \underbrace{p(x,y)}_{\text{alg.}} = 0\} = \underbrace{V}_{\text{geom.}}$ donde $p(x,y) \in k[x,y]$

¿Qué podemos decir de V?

Si grado $\underset{\substack{\| \\ A+Bx+Cy}}{p(x,y)}$ es $1 \Rightarrow$ No hay misterio, esto es una recta $\quad A,B,C \in k$

y la podemos parametrizar despejando 1 variable.

<u>Ej</u>: $\quad p(x,y) = x+y+1 \quad \Rightarrow \quad y = -1-x$

$$\therefore \quad V = \{(x, -1-x) : x \in k\}.$$

Si $\left.\begin{cases} P_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ P_m(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}\right\} = W \subseteq k^n$

$\Rightarrow$ W tampoco representa un super desafío si grado$(P_i) = 1$, ya que esto es álgebra lineal.

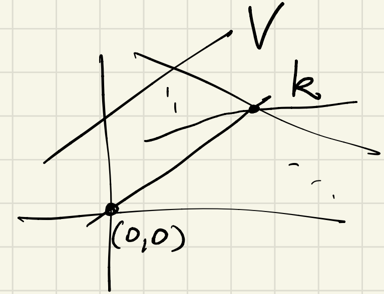
$\exists \quad x_i(t_1,\dots,t_r) \in k[t_1,\dots,t_r]$ de grado 1 tales que

$$P_j(x_1(t_1,\dots,t_r),\dots,x_n(t_1,\dots,t_r)) = 0 \quad \forall j.$$

y de hecho geométricamente

«W es un k^r trasladado».

Ejs. $k^2 = \mathbb{R}^2$, $\{ P_1(x,y) = 0 \} =$ rectas en el plano



« Algebra lineal = geom. algebraica en grado 1 »

obs. k en alg. lineal funciona excelente.

geom. alg. el estudio de soluciones de sist. ecuaciones polin. de grados arbitrarios.

En grado 2 ya vemos de k sí importa:

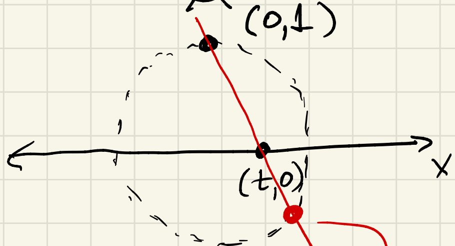
Ejl.- $k = \mathbb{R}$, $\{x^2+y^2+1=0\} = V \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\{x^2+y^2+1=0\} \overset{\shortparallel}{\emptyset}$$

Ejl.- $\{x^2+y^2-1=0\} = V \subseteq k^2$

$\mathbb{Q}^2$

$(0,1)$



Teor. de números

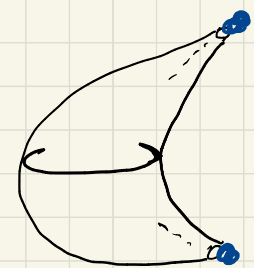
$$\frac{x}{t} + \frac{y}{1} = 1$$

$\mathbb{R}^2$

$= V$

cont. análisis geo. dif.

$\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$



«esfera \ 2 ptos»

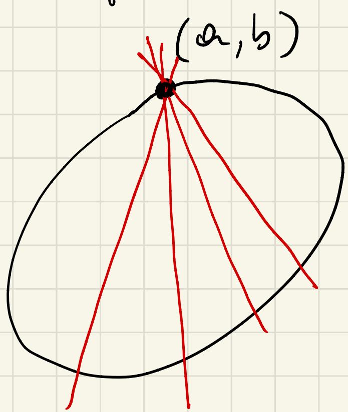
geom. alg.

$\Rightarrow \quad x = t(1-y) \quad \therefore$ usando $x^2+y^2=1$

$$y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\therefore \quad V = \left\{ \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) : t \in k \right\}$$

¿Cuál fue el truco?



grado$(p(x,y)) = 2$

$V = \{ p(x,y) = 0 \}$

$(a,b) \in V$, $(a,b) \in k^2$

tomar rectas por (a,b) con pendientes t en k

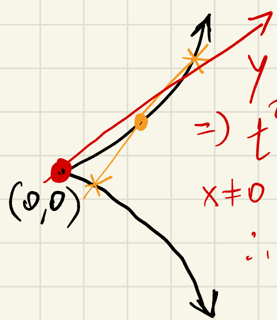
Tarea: Verificar que obtienen una parametrización (racional) de V, (entregando puntos coord k).

Def.- Una parametrización de $V = \{ f(x,y) = 0 \}$ con $f(x,y) \in k[x,y] \setminus k$ irreducible es la existencia de $x(t), y(t) \in k(t) \setminus k$ tales que

$$f(x(t), y(t)) = 0 \quad \forall t.$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = 1$$

Ej.- $\{ y^2 = x^3 \} = V_1 \qquad \{ y^2 = x^2(x+1) \} = V_2$

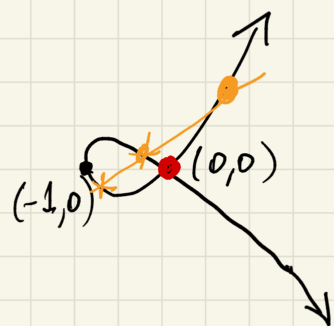


$y = tx$

$\Rightarrow t^2 x^2 = x^3$

$x \neq 0 \Rightarrow x = t^2$

$\therefore y = t^3$

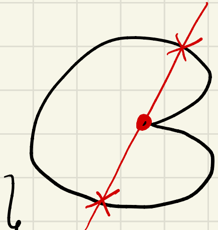


lo mismo.

Ej.- $r = 2(1-\cos(\theta))$

$$\Updownarrow$$

$$V = \{(x^2+y^2)^2 + 4x(x^2+y^2) - 4y^2 = 0\}$$

 $= V$

¿Será parametrizable?

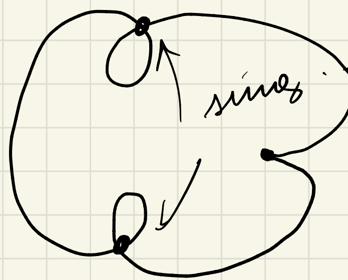
$$x(\theta) = 2(1-\cos(\theta))\cos(\theta)$$
$$y(\theta) = 2(1-\cos(\theta))\,\text{sen}(\theta)$$

No Queremos polinomios!!!

Resp.- Sí.

Desafío para ustedes.

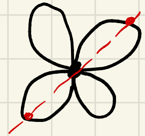
En $\mathbb{C}$:



en el infinito y sobre $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \exists$ parametrización.

Ej.- $\{r = \operatorname{sen}(2\theta)\}$ también es algebraica.



$$(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$$

Prop: Sea $k = \mathbb{C}$ y suponer $f(t), g(t) \in k(t)$ tal que
$$g^2 = f(f-1)(f-\lambda) \qquad \lambda \neq 0,1 \text{ constante}$$
$\Rightarrow$ f, g son constantes.

[Es decir, $V = \{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ **no** es parametrizable]

Dem: $f(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, $g(t) = \dfrac{r(t)}{s(t)}$, $p, q, r, s \in k[t]$

suponer p, q y r, s coprimos.

• Luego $r^2 q^3 = s^2 p(p-q)(p-\lambda q)$, en $k[t]$.

$\Rightarrow s^2 \mid q^3$ y $q^3 \mid s^2$ (coprimos)

$\Rightarrow s^2 = a q^3$, $\forall a \in k$

$\Rightarrow a q = \left(\frac{s}{q}\right)^2 \in k[t]$.

$\therefore$ $\underline{r^2} = a \underbrace{p(p-q)(p-\lambda q)}_{\text{coprimos}}$.

q

$\therefore$ p, $(p-q)$, $(p-\lambda q)$ son cuadrados en $k[t]$.

<u>Lema</u>: Sean $p, q \in \mathbb{C}[t]$ coprimos. Si $\exists\ \frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 4 valores tal que $\lambda p + \mu q$ es cuadrado en $\mathbb{C}[t]$

$\Rightarrow p, q \in \mathbb{C}$.

Dem: Si $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ y $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\text{satisface los cuadr.}}$

$\Rightarrow$ p', q' también satisface cuadr. (Tarea)

Es decir, podemos pensar en $0, 1, \infty, \lambda$ (algún).

, ie, $p, q, p-q, p-\lambda q$ son cuadrados.

$p = u^2$, $q = v^2$ con u, v coprimos.

y $\max\{gr(u), gr(v)\} < \max\{gr(p), gr(q)\}$.

Suponer que entre todos los contraejemplos al lema, elegimos p, q tal que $\max\{gr(p), gr(q)\}$ sea lo mínimo posible.

y $u-v, u+v, u-\mu v, u+\mu v$ son

todos cuadrados donde $\mu^2 = \lambda$ ya que:

$$S^2 = p - q = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$$

$$R^2 = p - \lambda q = p - \mu^2 q = u^2 - \mu^2 v^2 = (u-\mu v)(u+\mu v)$$

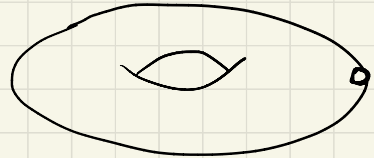
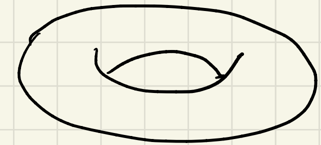
$$\longrightarrow\!\leftarrow$$

$\therefore$ $p, q \in \mathbb{C}$ y así $r, s \in \mathbb{C}$.

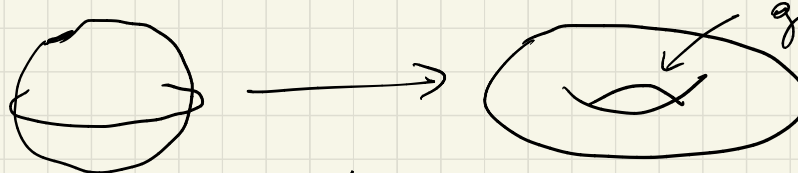
$$W = \{ y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \} \quad \lambda \neq 0,1$$

no es parametrizable.

¿Cómo justificarlo geométricamente?

$W \cong$  $\subseteq \overline{W} =$ 

una parametrización nos entregaría un morfismo analítico:

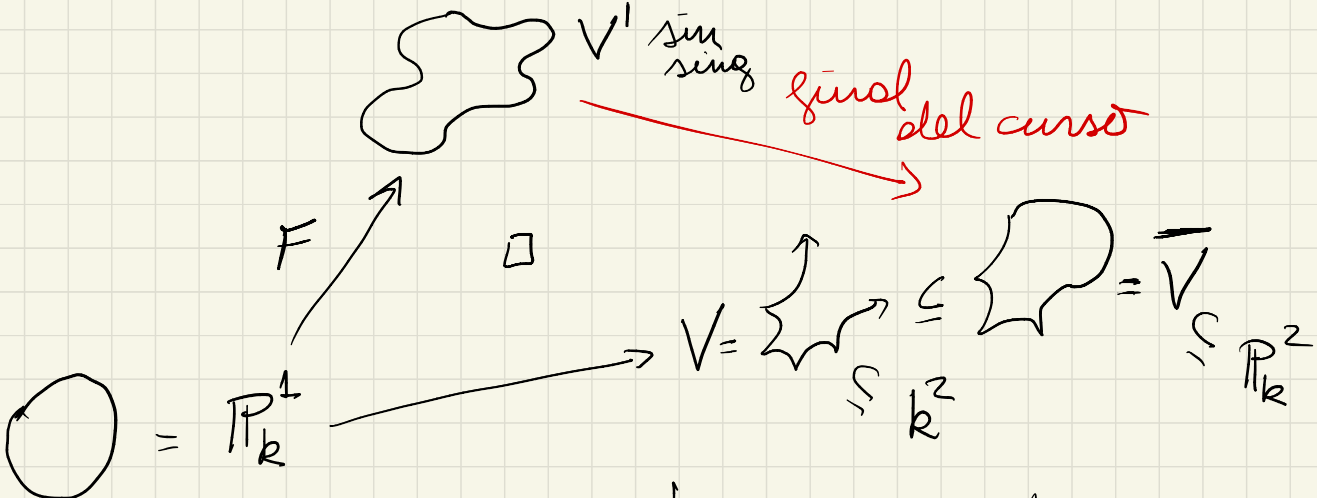


género = 1
⇓
1 hoyo!

Pero eso es contradictorio con Teorema de Riemann-Hurwitz: "género decrece".

¿Qué sucederá en general para curvas $\{p(x,y)=0\} = V \subseteq k^2$?

$k = \overline{k}$.



$\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{F} V'$ $\quad$ V' es suave y tiene género cero

$\Rightarrow$ género de V' es cero.

Riemann-Roch: Si V' tiene genero cero $\Rightarrow \simeq \mathbb{P}^1_k$.

Si $\bar{V}$ tiene grado d y es suave $\Rightarrow$ $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.