nodo

$\parallel$

$\{x^2+y^2=z^2\}$

$\subseteq \mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3$

gr 3 hay 27

gr ≥ 4

Quíntica Togliatti

(tiene 31 nodos)

$\equiv$

Máximo posible!!!

IGA

20/4/21

Variedades

isomorfismos

etc

V variedad es conj. alg. irred $\subseteq \mathbb{A}^n_k$, $k=\overline{k}$.

$\updownarrow$

$I(V)$ primo

funciones polin. sobre V

$\parallel$

Creamos un anillo : $\Gamma(V) = k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$ (dominio)

anillo de V coord.

$$K(V) = \text{Fracciones}(\Gamma(V)).$$

Morfismos entre variedades afines : $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_k$

$\Rightarrow$ un morfismo polinomial es $V \xrightarrow{\varphi} W$

$$\varphi(a_1,\dots,a_n) = (T_1(a_1,\dots,a_n), \dots, T_m(a_1,\dots,a_n))$$

con $T_i \in k[x_1,\dots,x_n]/I(V) = \Gamma(V)$.

[Manifold (topología) = Variedad top.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \neq$ dif.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \neq$ alg. . . .]

<u>Def</u>.- $V \xrightarrow{\varphi} W$ polinomial es <u>isomorfismo</u> si existe $W \xrightarrow{\psi} V$ polinomial $\psi \circ \varphi = 1\!\!1_V$, $\varphi \circ \psi = 1\!\!1_W$.

En tal caso, $V \simeq W$ (son isomorfos).

<u>Prop</u>.- $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_k$ variedades afines. Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{c} V \xrightarrow{\varphi} W \\ \text{polinomial} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{c} \Gamma(W) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \Gamma(V) \\ \text{homomorfismos de } k\text{-alg.} \end{array} \right\}$$

$$\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$$

Dem.) $V \xrightarrow{\varphi} W \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma(W) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \Gamma(V)$

$p \mapsto (T_1(p), \dots, T_m(p))$, $\quad T_1(p) = y_1, \dots, T_m(p) = y_m$

$y_1 \longmapsto T_1(x_1, \dots, x_n)$

$\vdots$

$y_m \longmapsto T_m(x_1, \dots, x_n)$

y extender.

Todo bien definido y 1-1 (tarea) ∎

$$\therefore \quad \underbrace{V \simeq W}_{\text{Geo.}} \iff \underbrace{\Gamma(W) \simeq \Gamma(V)}_{\text{alg.}}$$

$$\left[\; V \leftrightarrow \Gamma(V) \quad , \quad \underset{\substack{\text{alg} \\ \text{como cuerpos}}}{K(V) \simeq K(W)} \iff V \text{ biracional } W \; \right]$$

$V \supset \mathcal{U}$ (abierto) $\xrightarrow[\text{iso}]{\simeq}$ $\mathcal{U}' \subset W$ (abierto)

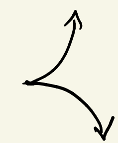
Ejl.- $\mathbb{A}^1_k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^2_k$ polinomial.

$t \longmapsto (t, t^n)$

$\operatorname{Im}(\varphi) = W = \{ y = x^n \} \qquad I(W) = (y - x^n).$

$$\Gamma(W) = k[x,y]/(y-x^n) \simeq k[x] \simeq \Gamma(\mathbb{A}^1_k)$$

$\Rightarrow \varphi$ es isomorfismo entre $\mathbb{A}^1_k$ y W.

Ejl.- $\mathbb{A}^1_k \xrightarrow{F} \mathbb{A}^2_k \qquad \longleftrightarrow \quad \longmapsto$ 

$t \longmapsto (t^2, t^3)$

$\operatorname{Im}(F) = W = \{ y^2 = x^3 \} \qquad I(W) = (y^2 - x^3)$

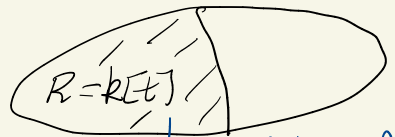
$$k[x,y]/(y^2-x^3) = \Gamma(W) \xhookrightarrow{\overline{F}} k[t] = \Gamma(\mathbb{A}^1_k) \qquad \Gamma(W) = k[t^2, t^3] \subset k[t] = \Gamma(\mathbb{A}^1_k)$$

$x \longmapsto t^2$

$y \longmapsto t^3$

¿Hay algún $\mathbb{A}^1_k \xrightarrow{G} W$ que sí sea isomorfismo?

Si existe, entonces $\Gamma(W) \xrightarrow[\simeq]{\overline{G}} \Gamma(\mathbb{A}^1_k) = k[t]$



$k(t) = \mathrm{Frac}(R)$

↳ integralmente cerrado

Resp: No ya que $\Gamma(W)$ no es int. cerrado.

[Hartshorne 1.1] Clasificar curvas de grado 2 en $\mathbb{A}^2_k$.

a) $Y = \{ y = x^2 \}$ $\Rightarrow$ $\Gamma(Y) = k[x,y]/(y - x^n) \simeq k[x]$

b) $Z = \{ xy = 1 \}$ $\Rightarrow$ $\Gamma(Z) = k[x,y]/(xy-1)$

$\boxed{\text{Si } k[x] \simeq \Gamma(Z) \Rightarrow \exists\, p(x) \text{ con inverso} \rightarrow\leftarrow}$

c) Toda cónica irred. en $k[x,y]$ es isomorfa a Y o Z (y $Y \not\simeq Z$).

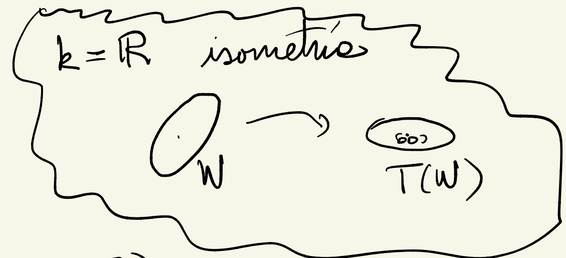
$W = \{ f(x,y) = 0 \}$ $\qquad f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g$

$y^2 = Ax^3 + Bx + C$

$y^2 = (x)(x-1)(x-\lambda)$

estrategia

$$\begin{cases} \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_k & \xrightarrow{T} & \mathbb{A}^2_k \\ \cup & & \cup \\ W & \simeq & T(W) \end{array} \\ T(x,y) = (\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}, \bar{d}x + \bar{e}y + \bar{f}) \\ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{d} & \bar{e} \end{bmatrix} \text{ es invertible} \qquad (\bar{c}, \bar{f}) \text{ traslado} \\ T(W) \text{ será definida por ecuación mismo grado} \\ \quad \text{y es biyección} \end{cases}$$



$$(a,b) \in W = \{ f(x,y) = 0 \} \xrightarrow{T} W' = T(W) = \{ Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = 0 \}$$

$$(0,0) = T(a,b)$$

$\therefore$ "completar cuad."

$$W' = \{ A(x-\alpha)^2 + B(y-\beta)^2 = C \} \simeq Z$$

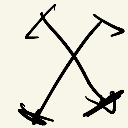
$$A, B \neq 0$$

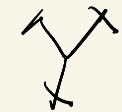
o

$$\{ A(x-\alpha)^2 + Dy = C \} \simeq Y$$

$$A(x-\alpha)^2 + B(y-\beta)^2 = \underbrace{(ux+vy+w)}\underbrace{(\bar{u}x+\bar{v}y+\bar{w})}$$

$k=\bar{k}$





grado 1 ✓

$\{x=0\}$

grado 2 ✓

$Y \circ Z$

grado 3

?

No sing. dependen de 1 parametro $\in k$

§2.3 Cambio de coord.

Def: Es un $T: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $T(x_1,\dots,x_n) = A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$

con A invertible $(\in GL_n(k))$.

★ Tarea: $\underset{\text{var.}}{V} \subseteq \mathbb{A}^n \xrightarrow{T} \mathbb{A}^n \Rightarrow T(V)$ es variedad y se escr. ecuaciones explicitas y $T(V) \cong V$.