$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : xy - z^2 = 1\} \qquad Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 y - z^2 = 1\}$$

$$\Rightarrow \quad X \not\simeq Y$$ desafío 1

Pero

$$\tilde{X} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 : xy - z^2 = 1\} = X \times \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{X} \simeq \tilde{Y}$$ desafío 2

$$\tilde{Y} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 : x^2 y - z^2 = 1\} = Y \times \mathbb{C}$$

No se sabe:
(Problema de cancelación de Zariski)

$$X \times \mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$$

$$\Downarrow ?$$

$$X \simeq \mathbb{A}^n$$

IGA

22/4/21

Funciones racionales y anillos locales

§2.4 Funciones racionales y anillos locales.

Def.- $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ variedad, $\Gamma(V) = k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$ dominio

$\therefore$ $K(V)$ = cuerpo de fracciones de $\Gamma(V)$

(cuerpo de funciones racionales)

Notar que $f \in K(V)$ NO son funciones $V \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ ya que $f = \frac{g}{h}$ y podríamos tener $p \in V$ y $h(p) = 0$.

[Lo común será verlo como aplicación racional $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1_k$]

Ejl.- $V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}^4_k \Rightarrow f = \frac{X}{Y}$

V

$\Gamma(V) = k[X,Y,Z,W]/(XW-YZ)$ $\qquad f = \frac{X}{Y} \in K(V)$

Notar que $f = \frac{Z}{W} = \frac{X}{Y}$ $\qquad ZY - XW \in I(V)$

la función f está definida en $Y \neq 0$ o $W \neq 0$.

Def.- Sea $p \in V$. Se define el anillo local de V en p.

$$\mathcal{O}_p(V) := \left\{ f \in K(V) : \begin{array}{l} \text{tal que } f \text{ está definida en } p, \\ \text{ie, } \exists\, f = \frac{a}{b} \text{ donde } b(p) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Notar que $\mathcal{O}_p(V)$ es un anillo y

$$k \subset \Gamma(V) \subset \mathcal{O}_p(V) \subset K(V).$$

¿Porqué local? Ya que hay 1 ideal maximal $m_p = \{ f \in \mathcal{O}_p(V) : f(p) = 0 \}$.

Ej.- $p \in \mathbb{A}^1_k = V$

$$\mathcal{O}_p(V) = \left\{ f = \frac{g(t)}{h(t)} \text{ tal que } f = (t-p)^{\alpha} \cdot m(t),\ m(p) \neq 0,\ \alpha \geq 0 \right\}$$

$$\quad \| \qquad\qquad m_p = (t-p) \leq \mathcal{O}_p(V)$$

$$k[t]_{(t-p)}.$$

Def.- El conj. de polos de una $f \in K(V)$ es el conj. de puntos $p \in V$ donde f <u>NO</u> está definida.

Prop: (1) El conj. de polos de una $f \in K(V)$ es algebraico.

(2) $\Gamma(V) = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$.

dem.- • $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $G \in k[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \overline{G} \in \Gamma(V)$. (notación)

• Sea $J_f = \{ G \in k[x_1, \dots, x_n] : \overline{G} \cdot f \in \Gamma(V) \}$

• J_f es ideal y contiene $I(V)$.

• Los puntos de $V(J_f)$ son los polos de f.

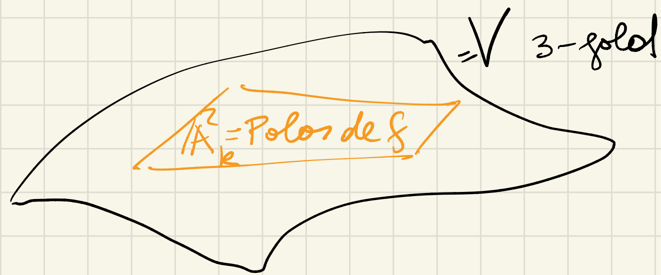
[Si $p \in V$ es polo. Queremos que $p \in V(J_f)$. Sea $G \in J_f$
$G(p) = 0$ (queremos) $\overline{G} \cdot f = \overline{H} \in \Gamma(V)$ $f = \frac{\overline{H}}{\overline{G}}$
$\therefore$ como p es polo, $G(p) = 0$. $\Rightarrow p \in V(J_f)$.

$p \in V(J_f)$. Si p no es polo $f = \frac{H}{G}$ $\quad G(p) \neq 0$

pero $\bar{G} f = \bar{H} \in \Gamma(V) \Rightarrow \bar{G} \in J_f \Rightarrow G(p) = 0 \rightarrow\leftarrow$

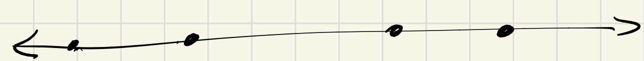
$f = \frac{x}{y}$ $\quad V = \{xw = zy\} \subset \mathbb{A}^4_k \Rightarrow J_f = (xw - zy, y, w)$

los polos de $f = \{(x,0,z,0) : x,z \in k\} \subset V$



Ej1.- En variable compleja se usa lo de "polos".

$\mathbb{A}^1_k$ $\quad k = \mathbb{C}$ $\qquad f$ = racional



$\cancel{\infty}$

$$\begin{array}{c} \cap \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array} \qquad \text{curva} = V \dashrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \quad f = \frac{H}{G}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ & {[H, G]} \end{tikzcd}$$

(2) Si $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V) \underset{\text{(queremos)}}{\Longrightarrow} f \in \Gamma(V)$

$$\left[\underset{f}{\Gamma}(V) \subset \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V) \,, \quad f = \frac{H}{1} \right]$$

Si $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V) \Rightarrow V(J_f) = \emptyset$

$$\underset{\text{conj de polos}}{\overset{\parallel}{V(J_f)}}$$

$\Rightarrow$ Nullstellensatz, $1 \in J_f = \{ G : G \cdot f \in \Gamma(V) \}$

$\therefore \; G = 1 \Rightarrow 1 \cdot f \in \Gamma(V) \Rightarrow f \in \Gamma(V)$ ■

Def: $f \in \mathcal{O}_p(V)$, el valor de f en p es $f(p) = \dfrac{a(p)}{b(p)}$ si $b(p) \neq 0$ (está bien definido).

$$\mathfrak{m}_p(V) = \{ f \in \mathcal{O}_p(V) \,/\, f(p) = 0 \}$$

y $\mathcal{O}_p(V) / \mathfrak{m}_p(V) \cong k$ $\left[\; \mathcal{O}_p(V) \xrightarrow{ev_p} k \quad \ker(ev_p) = \mathfrak{m}_p(V) \; \right]$

$\;\; \mathbin{/\!/}$

cuerpo residual.

unidades de $\mathcal{O}_p(V) = \{ f$ con $f(p) \neq 0 \}$.

Lema: Los siguientes son equiv. para un anillo R

(1) El conjunto de no-unidades de R forman un ideal.

(2) R tiene un único ideal maximal.

$(1) \Rightarrow (2)$ ✓

$\mathfrak{m}$ = no-unidades $\quad a, b \in \mathfrak{m} \quad ra \quad a+b$ no unidad

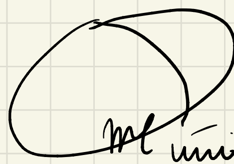
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{u}$

$$a \in \mathfrak{m},\ r \in R \Rightarrow ra \in \mathfrak{m}$$

$$ra = u,\quad r u^{-1} \cdot a = 1 \Rightarrow a \text{ unidad } \rightarrow\leftarrow$$

$$a, b \in \mathfrak{m} \Rightarrow \boxed{a + b = u}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) p.d. (en el chat).



$\mathfrak{m}$ único ideal max.

Def/ Si (1) o (2) del lema se satisface para R $\Rightarrow$ R se dice anillo local.

Prop: $\mathcal{O}_p(V)$ es un dominio local Noetheriano.

Dem/
- Sea $I \underset{\text{ideal}}{\subset} \mathcal{O}_p(V) \subset K(V)$
- Como $\Gamma(V)$ es Noetheriano $\Rightarrow$ $\boxed{\Gamma(V) \cap I}$ es f.g.
  $(f_1, \dots, f_r) \leftarrow$
- Si $f \in I \subset \mathcal{O}_p(V)$ $\exists\, b \in \Gamma(V)$, $b(p) \neq 0$, tal que $b \cdot f \in \Gamma(V) \Rightarrow bf = \sum a_i f_i$
  $f = \sum \left(\frac{a_i}{b}\right) \cdot f_i \Rightarrow I = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathcal{O}_p(V)$ ■