Conjetura del Jacobiano: Sea $k$ cuerpo de característica cero. Sea $F: \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ mapeo polinomial

$$F(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n), \dots, f_n(x_1,\dots,x_n)).$$

Si $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \in k \setminus \{0\}$, entonces $F$ es isomorfismo.

- Michigan 2004 y caso $n=2$.
- $(x,y) \mapsto (x, y+f(x))$
- Con $p$, $x \mapsto x - x^p$

IGA

27/4/21

caja de herramientas algebraica

§2.5 Anillos de valuación discreta (DVR).

De qué estamos hablando → anillo local en ptos. suaves de curva (dim 1)

→ detector de mult. de polos y ceros de funciones racionales.

<u>Prop</u>.- $R$ = dominio que no es un cuerpo. Luego,

$R$ es Noetheriano y local, y el ideal maximal es principal $\iff$ $\exists\, t \in R$ irreducible tal que $\forall z \in R,\ z \neq 0$, $z = u \cdot t^n$ (única) para alguna $u$ es unidad y para algún $n \geq 0$.

[ej: $p = 0 \in \mathbb{A}^1_k$, $k[t]_{(t)} = \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^1_k) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} : g(0) \neq 0 \quad f, g \in k[t] \right\}$

$t \in R = \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^1_k) \ni z = \frac{t^2+1}{t+101} = u \cdot t^0 \qquad R \ni z = \frac{t^2+t}{t+2} = u \cdot t^1$ ]

**dem**: (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathfrak{m}$ = ideal maximal $= (t)$.

Asumir $\underset{n \geq m}{ut^n = vt^m} \Rightarrow ut^{n-m} = v \Rightarrow n = m$ y $u = v$.

Queremos $z = u \cdot t^n$, $\forall z \in R$.

Si $z$ es unidad ✓ $z = u \cdot t^0$. Sino $z \in \mathfrak{m} = (t)$, $z = z_1 t$

Si $z_1$ es unidad ✓ sino $z_1 = z_2 t$ y $z = z_2 t^2$ ...

si esto factoriza apenas ✓ sino

$(z_1) \subset (z_2) \subset \cdots$ + Noetheriano $\Rightarrow (z_n) = (z_{n+1})$

para algún $n \Rightarrow z_n = \psi z_{n+1}$ $z_{n+1} = \nu z_n$

$\Rightarrow z_n = \psi \nu z_n$ $z_n \neq 0$ $\underset{\text{Dominio}}{\Rightarrow}$ $\nu \cdot \psi = 1$.

$\Rightarrow z_{n+1} = \nu z_n$ .... $z = \nu t^n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathfrak{m} = (t)$ = no unidades.

luego es fácil ver que los únicos ideales son $(t^n)$

$\Rightarrow$ Noeth, local ∎

**Def.**- $R$ dominio como en la prop se llama DVR, y $t$ es un parámetro uniformizante.

Si $K = K(R) \Rightarrow \forall z \in K,\ \exists n \in \mathbb{Z},\ \exists u$ unidad tal que $z = u \cdot t^n$, $\quad n := \text{orden}(z)$, $\quad \text{orden}(0) = \infty$

$R = \{ z \in K : \text{ord}(z) \geq 0 \} \supset \mathfrak{m} = \{ z \in K : \text{ord}(z) > 0 \}$.

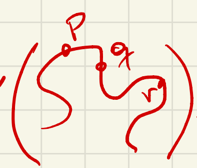
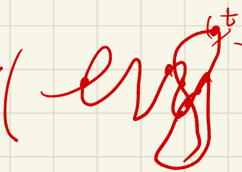
No ej: $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2_k \Rightarrow \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2_k)$ no es DVR.

obs: $\underbrace{\{ y^2 = x^3 - 1 \}}_{= V} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, $\quad P = (1,0) \in V$ $\qquad \mathcal{O}_P(V) \overset{?}{\simeq} \mathcal{O}_0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})$

Resp. NOOoo..... !

$\Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V) \subset K(V) \qquad k[t] \subset k[t]_{(t)} \subset k(t)$

Desafío: $K(V) \not\simeq k(t)$ [V no es racional].

[ $K($  $) = \{ \mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q, \ldots, \mathcal{O}_r \}$ $\qquad K($  $)$ ]



Hartshorne

Max. $= k(t_1, \ldots, t_n) \subset K(V) \supset k$

## §2.6 Formas.

**Def.** – Una *forma* es un polinomio homogéneo en $R[x_1, \dots, x_{n+1}]$, $R$ dominio.

[ variedad afín $\subset \mathbb{A}^n$ $\subset$ variedad proy. $\subset \mathbb{P}^n$ ] [ $\{x+y+1=0\} \subset \mathbb{A}^2_k$ $\subset$ $\{x+y+z=0\} \subset \mathbb{P}^2_k$ ]

$V$ " $\quad$ $\overline{V}$ "

$$\{x+y+1=0\} \xrightarrow{\text{homogeneizar}} \{x+y+z=0\}$$

$$F \in R[x_1, \dots, x_{n+1}] \text{ forma } \xrightarrow{\text{deshom.}} F_* := F(x_1, \dots, x_n, 1)$$

$$f^* := x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \dots + f_d \xleftarrow{\text{homog.}} f \in R[x_1, \dots, x_n]$$

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d, \quad \text{gr} = 0,\ \text{gr} = 1,\ \dots,\ \text{gr} = d$$

$$\underbrace{x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \dots + f_d}_{\text{forma :)}}$$

**Prop.** – (1) $(FG)_* = F_* \cdot G_*$ ; $(fg)^* = f^* g^*$

(2) $F \neq 0$ y $r$ mayor potencia de $x_{n+1}$ que divide a $F$

$$\left[ \underbrace{X_{n+1}^{100}\left(X_{n+1}X_n - X_{n-1}^2\right)}_{F} \right] \Rightarrow \quad x_{n+1}^{r}(F_*)^* = F \;;\; (f^*)_* = f.$$

$$\begin{cases} F_* = X_n - X_{n-1}^2 \\ (F_*)^* = X_{n+1}X_n - X_{n-1}^2 \end{cases}$$

(3) $(F+G)_* = F_* + G_*$ ; $X_{n+1}^{t}(f+g)^* = X_{n+1}^{r} f^* + X_{n+1}^{s} g^*$

$r = \deg(g)$ , $s = \deg(f)$ , $t = r+s-\deg(f+g)$.

Cor | Salvo potencias de $X_{n+1}$ , factoriz $F$ es lo mismo que fact. $F_*$.

## §2.7 Producto directo de anillos.

Si $R_1, \dots, R_n$ son anillos $\Rightarrow$ $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ con $+$ y $\cdot$ obvios (comp. a comp) y tenemos morfismos proyección

$$\pi_i : R_1 \times \dots \times R_n \longrightarrow R_i$$

Propiedad universal : $\forall R$ anillo y $\forall \varphi_i : R \to R_i$ $i = 1, \dots, n$

$\exists!$ $\varphi : R \longrightarrow R_1 \times \dots \times R_n$ tal que $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & R_1 \times \cdots \times R_n \arrow[d, "\pi_i"] \\
R \arrow[ur, "\exists! \varphi"] \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[ur, phantom, "\square", shift right=4] & R_i
\end{tikzcd}$$

[En particular, $k$ cuerpo $\subset R_i \ \forall i \Rightarrow k \subset R_1 \times \cdots \times R_n$.].