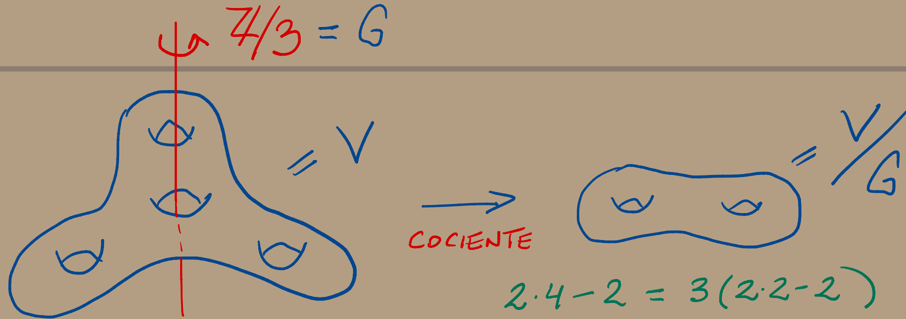

$2\cdot 4 - 2 = 3(2\cdot 2 - 2)$

Si V = variedad afín y $\boxed{G}$ = grupo finito

$G \leq \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow G$ actúa en $\Gamma(V)$.

Considere $\Gamma(V)^G = \{ f \in \Gamma(V) : f(g(x)) = f(x)\ \forall g \in G \}$

Tarea: $\Gamma(V)^G$ es k-álgebra finitamente generada

$\therefore\ \Gamma(V)^G = \Gamma(W)$ para W variedad afín

y $\Gamma(V)^G \subset \Gamma(V)$

$\Rightarrow V \longrightarrow V/G =: W$

iga

4/Mayo/21

Ahora sí :

Fin del Álgebra

Ej: $V = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, $(x,y) \overset{T}{\mapsto} (-x,-y)$

$\mathbb{Z}/2 \simeq G = \langle T \rangle$ $\quad T^2(x,y) = (x,y)$

$\Gamma(V)^G \simeq k[u,v,w]/(uv-w^2)$

$$\Gamma(V)^G = k[x,y]^G = \underbrace{\langle \overset{=u}{x^2}, \overset{=v}{y^2}, \overset{=w}{xy} \rangle}_{\text{como } k\text{-alg.}} \subset k[x,y]$$

$\mathbb{A}^2/G = W = \{uv - w^2\} \subset \mathbb{C}^3$

I. SHAFAREVICH "Basic Algebraic Geometry 1"

M. Reid "Undergraduate Algebraic Geometry"

§10. Modulos cocientes y sucesiones exactas.

- R anillo, M, M' R-módulos. Un morfismo de R-módulos es $\varphi: M \longrightarrow M'$ tal que

$$\varphi(m_1+m_2) = \varphi(m_1)+\varphi(m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M$$

$$\text{y} \quad \varphi(rm) = r\varphi(m) \quad \forall r \in R, \forall m \in M.$$

- $N \subset M$ un R-submodulo $\Rightarrow$ El grupo abeliano cociente M/N es un R-módulo: $r \cdot \overline{m} = \overline{rm}$. Y tenemos

$$M \longrightarrow M/N.$$

- Para φ cualquiera tenemos $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$ son submódulos.

- Def: $M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M''$ es <u>exacto</u> si $\ker(\varphi) = \operatorname{Im}(\psi)$.

<u>obs</u>: $\underset{0 \mapsto 0}{0 \longrightarrow M}$ y $\underset{m \mapsto 0}{M \longrightarrow 0}$ son únicos.

luego $M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exacto $\Leftrightarrow$ $M \longrightarrow M''$ es sobre

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ exacto $\Leftrightarrow$ $M' \longrightarrow M$ es 1-1

- Si $\varphi_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ morf. de R-mod $\Rightarrow$ diremos que

Def: $M_1 \to M_2 \to \dots \to M_{n+1}$ <u>exacto</u> $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} \varphi_i = \ker \varphi_{i+1}$ $\forall i$.

$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ exacta

" $M_1 \subset M_2$ " y " $M_3 \simeq M_2/M_1$ "

<u>Prop</u>: (1) $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ sucesión exacta de esp. vect. de dim finita $\Rightarrow \dim_k V' + \dim_k V'' = \dim_k V$.

(2) Sea $0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \to 0$ exacta entre esp. vectoriales dim finita $\Rightarrow$

$$\dim V_4 = \dim V_3 - \dim V_2 + \dim V_1 .$$

<u>Dem</u> (1) alg. lineal directa!

(2)

$0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \operatorname{Im}(\varphi_2) \to 0$ exacta

$0 \to \ker(\varphi_3) \to V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \to 0$ exacta

Por otro lado $\operatorname{Im}(\varphi_2) = \ker(\varphi_3)$.

$$\dim V_2 = \dim V_1 + \dim \mathrm{Im}(\varphi_2)$$

$$(-) \quad \dim V_3 = \dim V_4 + \dim \ker(\varphi_3)$$

§11. Módulos libres.

R anillo, X = conjunto arbitrario

$$\therefore \quad M_X := \{ \varphi : X \longrightarrow R \ \text{ funciones con } \varphi(x) = 0 \text{ salvo un número finito de } x \in X \}$$

M_X tiene estructura de R-módulo

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \qquad (r\varphi)(x) = r\varphi(x) .$$

Def.- M_X es el R-módulo libre generado por X.

(Prop. universal) Si $\alpha : X \to M$ es una función cualquiera de X a M R-módulo $\Rightarrow \exists! \ \bar{\alpha} : M_X \to M$ la cual es R-mod. morfismo.

Si $R = \mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$-módulo libre.

Def.- Un R-módulo M se llama libre con base $m_1, \ldots, m_n \in M$ si para $X = \{m_1, \ldots, m_n\}$ el morfismo $M_X \to M$ es isomorfismo.

Ej.- $F = x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_0 \in R[x] \Rightarrow R[x]/(F)$ es un R-módulo libre con base $\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}$.