Teoría de intersección y geometría algebraica.

W. Fulton "Intersection theory" 1984
(ganó el Steele Prize)

iga

6/Mayo/21
Curvas planas
teoría local

§1. Puntos múltiples y rectas tangentes.

$$V = \{ F(x,y) = 0 \} \subset \mathbb{A}^2_k \quad , \quad k = \overline{k}$$

$F(x,y) \in k[x,y]$ no constante. Llamaremos a V curva plana. Notar que F puede ser reducible.

- F define únicamente a V salvo mult. por constante

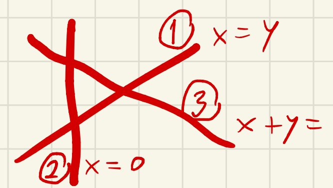
$$\Big[\{ F = 0 \} = \{ 2F = 0 \} \text{ si char } k \neq 2 \Big]$$

- $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$, $V = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ es la descomposición en irreducibles

multiplicidades de cada componente.

si $\alpha_i = 1 \Rightarrow$ componente <u>simple</u> (no múltiple).

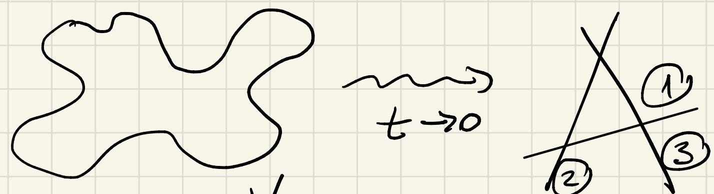
Ej.- $V\left(x^2 (x-y)(x+y-1)^3 \right)$



Una curva de grado 6 suave puede degenerar a esas tres rectas.

$$V_t\left(x^2(x-y)(x+y-1)^3 + t\,y^6 \right)$$

Salvo una cantidad finita de t, V_t es irreducible.
En particular para t cercanos a 0.



V_t

Def:- Sea $V = \{F=0\} \subset \mathbb{A}^2_k$ ~~irreducible~~. Luego $P \in V$ es punto simple (no singular) si $F_x(P) \neq 0$ ó $F_y(P) \neq 0$. En este caso, la recta

$$F_x(P)(x-a) + F_y(P)(y-b) = 0$$

es la recta tangente de V en $P=(a,b)$.

Si P no es simple $\Rightarrow$ se llama <u>múltiple</u> (singular).

<u>Def</u>.- Si todo $P \in V$ es <u>simple</u> $\Rightarrow$ V se llama curva no singular.

<u>Ej</u>.- $F = y^2 - x^2(x+1) = 0$, $F_y = 2y = 0$ $\quad F_x = -3x^2 - 2x = 0$

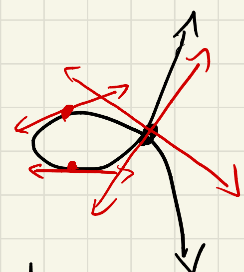
char $k \neq 2,3$ $\Rightarrow$ $y = 0$ y $-3x^2 - 2x = 0$

$x = 0$ o $\cancel{x = \frac{-2}{3}}$

$\therefore$ punto singular $(0,0)$

char $k = 3$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ $\qquad$ char $k = 2$ $\Rightarrow$ $(0,0)$.

$$F = \underbrace{y^2 - x^2}_{F_2} - \underbrace{x^3}_{F_3}$$



$$y^2 - x^2 = 0$$
$$\parallel$$
$$(y-x)(y+x)$$

$\{F_2 = 0\}$ = Conj. de rectas tangentes.

Ejlr $\{(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0\}=V$

El punto $(0,0)$ es singular.

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_d$$

$$F = \underbrace{3x^2y-y^3}_{F_3} + \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{F_6}$$

$y(\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y)$

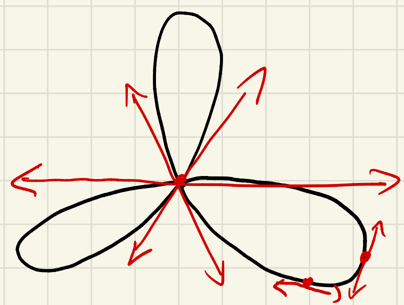
$\shortparallel$

$\{3x^2y-y^3=0\}$

$\shortparallel$

conj. de rectas tangentes.

V



Defn: $P=(0,0)$, $F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n$ $(m \leq n)$ $n = \deg(F)$, $F_m \neq 0$

La multiplicidad de $V = V(F)$ en p es $m_p(F) := m$.

Nota: P es nosingular $\iff m_p(F) = 1$.

$m_p = 2$ (punto doble) $\quad m_p = 3$ (punto triple)

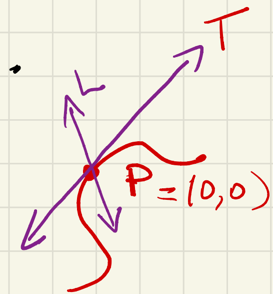
$F_m = \prod_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$, luego $L_1, \dots, L_s$ son las rectas tangentes de V en P y

r_i = mult. de las rectas.

Si $r_i = 1 \ \forall i \Rightarrow P$ es un <u>punto multiple ordinario</u>

Para puntos $\underset{\overset{\shortparallel}{(a,b)}}{P} \neq (0,0)$ se traslada $F^T := F(x+a, y+b)$

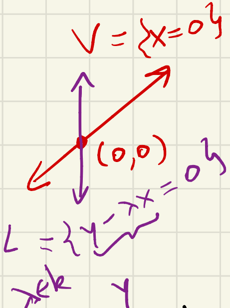
Luego hacer lo de arriba con F^T y trasladar.



<u>Tarea</u>: Si $F = \prod F_i^{e_i} \Rightarrow m_P(F) = \sum e_i \cdot m_P(F_i)$.

§2. Multiplicidades y anillos locales.

<u>Teo</u>: P es un punto simple de V(F) variedad
$\iff \mathcal{O}_P(V(F))$ es un DVR. En este caso,
si $L = ax+by+c$ es recta NO Tangente en P
$\Rightarrow$ su imagen en $\mathcal{O}_P(V(F))$ es parámetro uniformizante
de $\mathcal{O}_P(V(F))$.



<u>Dem</u>:
- Asumir $P = (0,0)$ (sino hacer traslación)
- Asumir que $L = \{x = 0\}$ no tangente, $\{y = 0\}$ tangente.

$k[x,y] \supset (x,y)$

$k[x,y]/I = \Gamma(V)$

- En resumen, si $V = V(F) \Rightarrow F = y + F_2 + F_3 + \cdots + F_n$.
- Tenemos que demostrar que $x \in \mathcal{O}_P(V)$ es par. unif., ie, $\mathfrak{m}_P = (x) \subset \mathcal{O}_P(V)$.
- Por otro lado, $\mathfrak{m}_P = (x,y) \subset \mathcal{O}_P(V)$.

$$\mathcal{O}_P(V) \supset \underset{(x,y)}{\mathfrak{m}_P} = \left\{ \frac{H(x,y)}{G(x,y)} : G, H \in \Gamma(V), \ G(P) \neq 0 \quad G(x,y) = \underset{\neq 0}{A} + \cdots \right\}$$

$$\mathfrak{m}_P = \{ H(P) = 0 \}$$

- Notar que $F = yG - x^2H$, $G(P) \neq 0$, $H \in k[x]$, $H \neq 0$

$$F = y + x^2 \quad xy \quad y^2 + x^3 + x^2y \quad xy^2 \quad y^2$$

$$y(1 + x + y + \quad) + x^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{G^{-1} \cdot H \cdot x^2}_{u \cdot x^\alpha} \in (x) \quad \Rightarrow \quad (x,y) \subset (x)$$

$$(x,y) \supset (x)$$

$$\Rightarrow (x,y) = (x) \quad \mathcal{O}_P(V)$$

<u>Teo</u>: $P \in V(F)$ = curva irred. Entonces

$$m_P(F) = \dim_k \left(\mathfrak{m}_P(F)^n / \mathfrak{m}_P(F)^{n+1} \right)$$

$n \gg 0$.