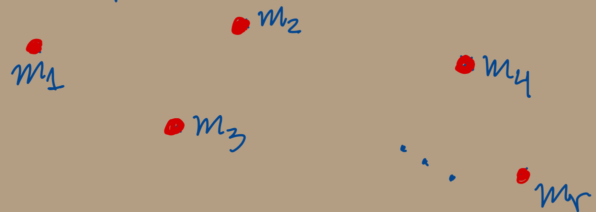
iga

18/Mayo/21

multiplicidades y Teo de Γ

Conjetura de Nagata (1959):

Considere $r > 9$ puntos en posición general con multiplicidades



Entonces toda curva plana C que pasa por esos puntos con multiplicidad al menos m_i satisface

$$\text{grado}(C) > \frac{1}{\sqrt{r}}(m_1 + \dots + m_r)$$

- Motivación de Nagata fue el problema 14 de Hilbert. ($k[x_1,\dots,x_n]^{G}$, G alg $\Rightarrow k[x_1,\dots,x_n]^G$ f.g.?)
- Nagata mismo probó que con $r = d^2$ funciona. No se sabe ningún otro caso.
- (BNC) Dada X = superficie proy suave $/\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{Z}$ tal que $\Gamma^2 \geq b$, $\forall\, \Gamma \subset X$ irred. curva.

char p falso

... Curvas planas : Mult en p, puntos sing, rectas tangentes, etc.

Teorema : $p \in V(F)$ = curva plana irreducible. Entonces

$$\begin{array}{c}\text{mult. de} \\ p \text{ en } V(F)\end{array} = m_p(F) = \dim_k \left(\mathfrak{m}_p(F)^n / \mathfrak{m}_p(F)^{n+1} \right)$$

donde $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p(V(F))$ es el ideal maximal y $n \gg 0$. En particular, la multiplicidad de $V(F)$ en p solo depende de $\mathcal{O}_p(V(F))$.

Dem : • $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{m} \subset \mathcal{O} = \mathcal{O}_p(V(F))$, $p = (0,0)$.

• Tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \longrightarrow 0$$

cociente por $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$

es exacta. Luego basta con demostrar de

$$\dim_k\left(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n\right) = n \cdot m_P(F) + s$$

para algún s, y para todo $n \geq m_P(F)$.

- $I = (x, y) \subset k[x,y]$. (Tarea) $\mathfrak{m}^n = I^n \cdot \mathcal{O}$.
- Como $V(I^n) = \{P = (0,0)\} \Rightarrow$

$$k[x,y]/(I^n, F) \underset{\substack{\text{visto} \\ \text{(global/local)}}}{\simeq} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(I^n, F)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \underset{\text{(Tarea)}}{\simeq} \mathcal{O}_P(V(F))/I^n\mathcal{O}_P(V(F)) \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$$

• Queremos calcular $\dim_k k[x,y]/(I^n,F)$ para $n \geq m_p(F) = m$.

$[F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_r]$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\bar{F}) \subset k[x,y]/I^n \arrow[r, "\varphi"] & k[x,y]/(I^n,F) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & k[x,y]/I^{n-m} \arrow[ur, "\psi"] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$G \mapsto GF$$

es exacto.

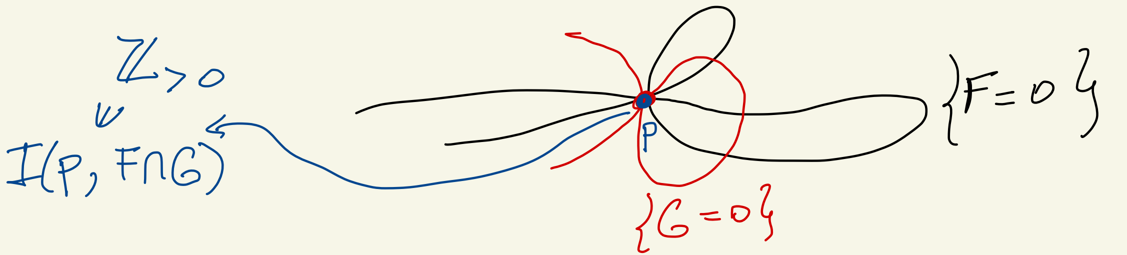
[ψ es 1-1 (tarea) ya que $FG \in I^n \Leftrightarrow G \in I^{n-m}$.]

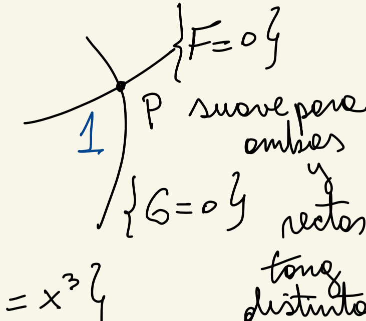
Como $\dim_k \left(k[x,y]/I^n \right) = 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$

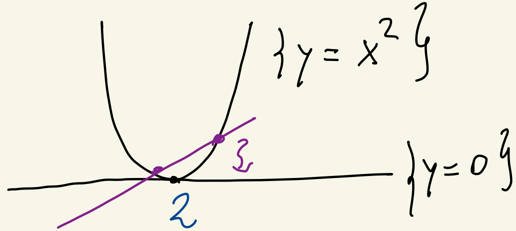
$$\Rightarrow \quad \dim_k \left(k[x,y]/(I^n,F) \right) = n \cdot m - \underbrace{\frac{m(m-1)}{2}}_{s} \quad \blacksquare$$

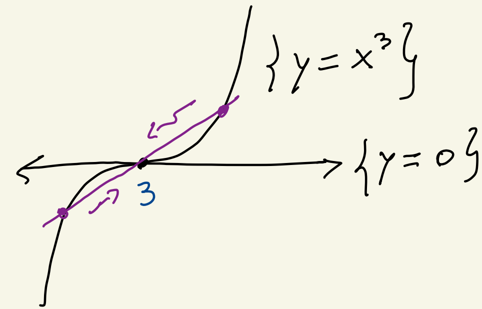
§3.3 Números de intersección.

Queremos asignar un número e









Para curvas F y G planas, y $P\in\mathbb{A}^2$, entonces queremos # de intersección

$$I(P, F\cap G) \text{ o } (F\cdot G)_P \text{ tal que:}$$

(1) $I(P, F\cap G)$ es un entero no negativo $\forall F, G, P$ si F y G no tienen componentes comunes. $I(P, F\cap G) = \infty$ sino.

(2) $I(P, F\cap G) = 0 \iff P \notin F\cap G$. $I(P, F\cap G)$ depende solo de los componentes que pasan por P, y $I(P, F\cap G) = 0$ si F o $G \in k^*$.

(3) Si T es un cambio de coordenadas afín en $\mathbb{A}^2$ y $T(P) = Q$

$$\Rightarrow \quad I(P, F\cap G) = I(Q, F^T \cap G^T).$$

(4) $I(P, F\cap G) = I(P, G\cap F)$.

(5) $I(P, F\cap G) \geq m_P(F)\cdot m_P(G)$

y $= \iff F$ y G no tienen rectas tangentes comunes en P.

(6) Si $F = \prod F_i^{r_i}$ y $G = \prod G_j^{s_j} \Rightarrow I(P, F\cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j \, I(P, F_i \cap G_j)$.

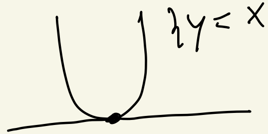
(7) $I(P, F\cap G) = I(P, F\cap(G + AF))$, $\forall A \in k[x, y]$.

__Teorema__: $\exists!$ $I(P, F\cap G)$ definido para todo F, G y $P \in \mathbb{A}^2$ tal que (1) - (7) son verdad.

Su fórmula es:

$$I(P, F\cap G) = \dim_k \left(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \big/ (F,G)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \right).$$

Ejlo



$\{y = x^2\} = F$

$\{y = 0\} = G$

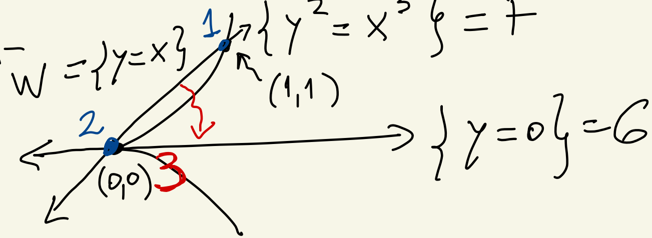
$$k[x,y] \big/ (y, y-x^2) \cong \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \big/ (y, y-x^2)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)$$

única intersección es $(0,0)$

$$k[x,y] \big/ (y, y-x^2) = k[x] \big/ (x^2) \text{ tiene dimensión } 2.$$

$$\Rightarrow I((0,0), F\cap G) = 2.$$

Ej.-



$x^2 = x^3 \qquad x^2(x-1)=0$

$x=0\,,\ x=1$

$$\underbrace{k[x,y]\big/(y-x,\,y^2-x^3)}_{\text{por calcular. } 3} \simeq \underbrace{\mathcal{O}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)\big/(y-x,\,y^2-x^3)\,\mathcal{O}_{(0,0)}}_{2} \oplus \underbrace{\mathcal{O}_{(1,1)}(\mathbb{A}^2)\big/(y-x,\,y^2-x^3)\,\mathcal{O}_{(1,1)}}_{\text{calculando rectas tangentes son dist, suave } 1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$k[x,y]\big/(y-x,\,y^2-x^3) = k[x]\big/(x^2-x^3) = \langle 1, x, x^2\rangle$$

$\dim_k$ es 3

$x^3 = x^2$

$$k[x,y]\big/(y,\,y^2-x^3) = k[x]\big/(x^3) \Rightarrow \dim_k \text{ es } 3.$$

FIN