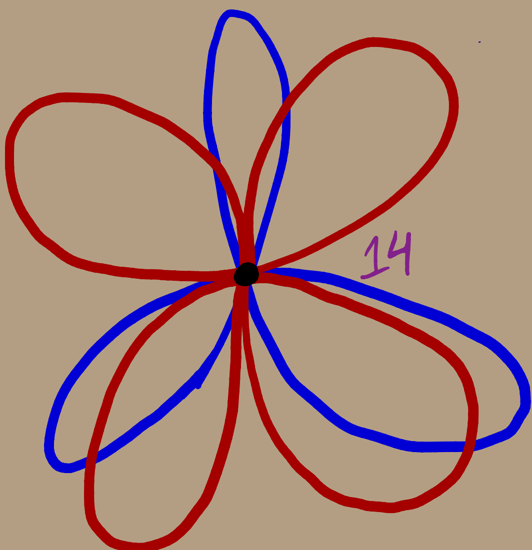

iga

20/Mayo/21

Intersección local

$$E = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$$

$$F = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$$

Calcular $I(\underset{P}{\underset{\shortparallel}{(0,0)}}, E\cap F)$.

- Reemplazar F por $F-(x^2+y^2)E = y\big(\underbrace{(x^2+y^2)(y^2-3x^2)-4x^2y}_{G}\big)$

$$\Rightarrow I(P,E\cap F) \qquad I(P,E\cap y)+I(P,E\cap G)$$

$$(7)\,\| \qquad\qquad /\!/\,(6)$$

$$I(P,E\cap(F-(x^2+y^2)E))$$

- Como $E = x^4+y\cdot A \Rightarrow I(P,E\cap y) \overset{(7)}{=} I(P,x^4\cap y) \overset{(6)}{=} 4$

- $G \rightsquigarrow G+3E = y(\underbrace{5x^2-3y^2+4y^3+4x^2y}_{H})$

:)

$$\therefore \quad I(P, E\cap G) = \underbrace{I(P, E\cap Y)}_{4} + \underbrace{I(P, E\cap H)}_{6} = 10$$

$$\Rightarrow \quad I(P, F\cap E) = 14.$$

<u>Teo</u>: $\exists !\ I(P, F\cap G)$ tal que (1) - (7) son verdad.

Tenemos fórmula: $I(P, F\cap E) = \dim_k \left[\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) / (F,G)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \right]$

$$\left[(F,G) \subset k[x,y] \subset \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2) \right]$$

Dem: Mostraremos que un $I(P, F\cap G)$ que satisface (1)-(7) es único. Mostraremos que con (1)-(7) podemos calcular.

- Suponer $P=(0,0)$ (3) y $I(P, F\cap G)^{\neq 0}$ y junto (1),(2).
- Asumir $I(P, F\cap G) = n > 0$ y que puede ser calculado para $I(P, A\cap B) < n$.
- Sean $F(x,0)$ y $G(x,0)$ de grado r, s respectivamente y r ó $s = 0$ si no hay variable x. Asumir $r \leq s$ (4)[simétrico]

Caso 1: $r=0 \Rightarrow F = yH$ y así

$$I(P, F\cap G) = I(P, y\cap G) + I(P, H\cap G)$$

por (6). Si $G(x,0) = x^m(a_0 + a_1 x + \dots)$, $a_0 \neq 0$ con $m \geq 1$

$\Rightarrow$

$$[G = G(x,0) + y\alpha]$$

$$I(P, Y\cap G) \overset{(7)}{=} I(P, Y\cap G(x,0)) \overset{(5)}{=} I(P, Y\cap x^m) = m$$

Como $P\in G$ y $m>0 \Rightarrow I(P, H\cap G) < n$.

<u>Caso 2</u>: $r>0$. Asumir $F(x,0)$, $G(x,0)$ mónicos

$$\Rightarrow \quad H = G - x^{s-r}\cdot F.$$

$\therefore$ $I(P, F\cap G) \overset{(7)}{=} I(P, F\cap H)$ y grado$(H(x,0)) = t < s$

Eso nos permite repetir el procedimiento en caso 2 hasta llegar a caso 1 y listo.

- Existencia (la fórmula).

p.d. $I(P, F\cap G) = \dim_k\left(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F,G)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)\right)$ satisface (1)-(7).

- (2), (4), (7) triviales.
- (3) ya que cambio coord define isom entre los $\mathcal{O}_P$, ideales.
- Asumir $P=(0,0)$ y que toda componente pasa por P.
- Si F y G no tienen comp. comunes $\Rightarrow$ $I(P, F\cap G)$ es finito $\left[\dim_k k[x,y]/(F,G) \text{ finito} \overset{F=G=0 \text{ finito}}{\Longleftrightarrow} \cong \bigoplus \underbrace{\mathcal{O}_P/(F,G)\mathcal{O}_P}_{\text{finito}} \Rightarrow \right]$.

Si F y G tienen comp. comunes, H $\Rightarrow$
$(F,G)\subset(H) \Rightarrow \mathcal{O}/(F,G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}/H$ $\quad \dim_k(\mathcal{O}/H)=\infty$
Pero $\Gamma(H)\subset\mathcal{O}_P(H)=\mathcal{O}/H$
$\dim_k(\Gamma(H))$ es ∞.

(1) ✓

• Para (6) queremos:

$$I(P, F\cap GH) = I(P, F\cap G) + I(P, F\cap H)$$

$\forall\, F, G, H$

asumir F y GH sin factores comunes.

• $\varphi : \mathcal{O}/(F, GH) \longrightarrow \mathcal{O}/(F, G)$ cociente por (G)

$\psi : \mathcal{O}/(F, H) \longrightarrow \mathcal{O}/(F, GH)$

$\psi(\overline{Z}) = \overline{GZ}$

Entonces es suficiente probar que:

$$0 \to \mathcal{O}/(F,H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F,GH) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/(F,G) \to 0$$

es exacto. Si fuese, listo :).

[Tarea: verificar eso].

- (5) es lo difícil. Sea $m = m_p(F)$ y $n = m_p(G)$.

$I = (x,y) \subset k[x,y]$.

$$\begin{tikzcd}
k[x,y]/I^n \times k[x,y]/I^m \arrow[r, "\psi"] & k[x,y]/I^{m+n} \arrow[r, "\varphi = \text{cociente}"] & k[x,y]/(I^{m+n},F,G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"', "\sim"] & 0 \\
 & \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,G) \arrow[r, "\text{cociente}"] & \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(I^{m+n},F,G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\psi(\bar{A},\bar{B}) = \overline{AF+BG}$$

$$\operatorname{Im}(\psi) = \ker(\varphi)$$

$$(*)\quad \left[\begin{aligned} &\dim_k\left(k[x,y]/I^n\right) + \dim_k\left(k[x,y]/I^m\right) \geqslant \dim(\ker\varphi) \\ &\dim_k\left(k[x,y]/(I^{m+n},F,G)\right) = \dim_k\left(k[x,y]/I^{m+n}\right) - \dim_k(\ker\varphi) \end{aligned}\right.$$

$$\therefore\quad I(P,F\cap G) = \dim_k\left(\mathcal{O}/(F,G)\right) \underset{(oc)}{\geqslant} \dim_k\left(\mathcal{O}/(I^{m+n},F,G)\right)$$

$$\parallel(\alpha)$$

$$\dim_k\left(k[x,y]/(I^{m+n},F,G)\right)$$

$$\geqslant$$

$$mn = \dim\left(k[x,y]/I^{m+n}\right) - \dim\left(k[x,y]/I^n\right) - \dim\left(k[x,y]/I^m\right)$$

[Tarea: = $\Longleftrightarrow$ lo que corresponde en 5]