COLORS OF MATH

iga

25/Mayo/21

variedades proyectivas

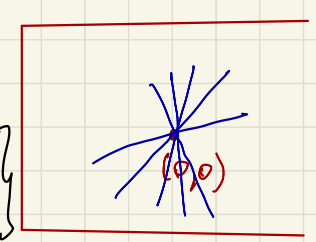
§4. Variedades proyectivas.

[forma oficial de compactificar algebraicamente variedades afines]

§4.1. Espacio proyectivo.

Def.- k = cuerpo. El espacio proyectivo de dimensión n $\mathbb{P}^n_k$ es el espacio de todas las rectas en $\mathbb{A}^{n+1}_k$ a través de $(0,0,\dots,0)$.

Ej.- $\mathbb{P}^0_k$ = pto. $\mathbb{P}^1_k$ $\shortparallel$ {El conjunto de pendientes de esas rectas}



$= \mathbb{A}^2_k$

Concreto: $\mathbb{P}^n_k := \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{(0,..,0)\} \big/ \sim$

$x \sim y$ si $\exists \lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda y$

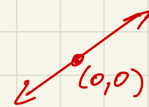
$\sim$ es relación de equivalencia.

$$\mathbb{P}^n_k = \{ [x_0, x_1, \dots, x_n] : x_i \in k \text{ no todos cero} \}$$

notar que $[\lambda x_0, \dots, \lambda x_n] = [x_0, \dots, x_n]$, $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

Ejlo $\mathbb{P}^0_k = \{[1]\}$ $\quad \mathbb{P}^1_k = \{ [x,y] : x,y \text{ no ambos cero} \}$

¿Porqué serán los pendientes?



$\{ax+by=0\}$ a, b no ambos cero

$\updownarrow$

$[a,b]$ = pendiente

pendiente 0 = $[0,1]$ $\quad$ pendiente ∞ = $[1,0]$.

Cada $\mathbb{P}^n_k$ está "compactificando" un $\mathbb{A}^n_k$. ¿Cómo?

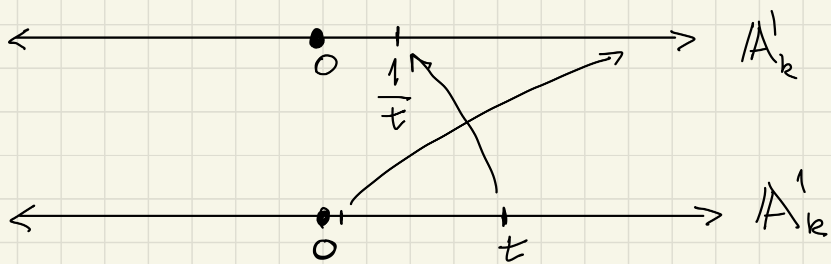
Nota de $\mathbb{A}^1_k \subset \mathbb{P}^1_k$ de dos formas.

(1) $\mathcal{U}_1 = \{ [x, 1] \in \mathbb{P}^1_k \}$ es una copia de $\mathbb{A}^1_k$.

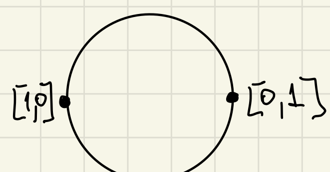
(2) $\mathcal{U}_2 = \{ [1, y] \in \mathbb{P}^1_k \}$ " otra " " ".

De hecho, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathbb{P}^1_k$

¿Qué es $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$? $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{ [x, y] : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \}$



$\therefore$ $\mathbb{P}^1_k =$



[Es de hecho la imagen $k = \mathbb{R}$]

Esfera de Riemann $= \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} =$  $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

obs) 1.- En efecto tenemos conjuntos $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{P}^n_k$

$$\mathcal{U}_i := \{ [x_0, \dots, x_n] : x_i \neq 0 \}$$

y luego cada $\mathcal{U}_i \equiv \mathbb{A}^n_k$ donde coord $(x_0, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Los $\mathcal{U}_i$ son los parches que pegados forman $\mathbb{P}^n_k$. ($n+1$ parches)

¿Qué es $\mathbb{P}^n_k \setminus \mathcal{U}_i$? Resp: $\mathbb{P}^n_k \setminus \mathcal{U}_i$ es $\mathbb{P}^{n-1}_k$ ya que $\mathbb{P}^n_k \setminus \mathcal{U}_i = \{ [x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n] \} = \mathbb{P}^{n-1}_k$.

Por ejemplo $\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1_k \sqcup \{[1,0]\}$

$\mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \sqcup \mathbb{P}^1_k$, $\mathbb{P}^1_k$ es una "recta en el ∞".

$\vdots$

$\mathbb{P}^n_k = \mathbb{A}^n_k \sqcup \mathbb{P}^{n-1}_k$.

Ej: Miremos $\mathbb{P}^2_k = \{[x,y,z]\}$. $\mathbb{P}^2_k = U_1 \cup U_2 \cup U_3$

$U_1 = \{x \neq 0\}$

$U_2 = \{y \neq 0\}$

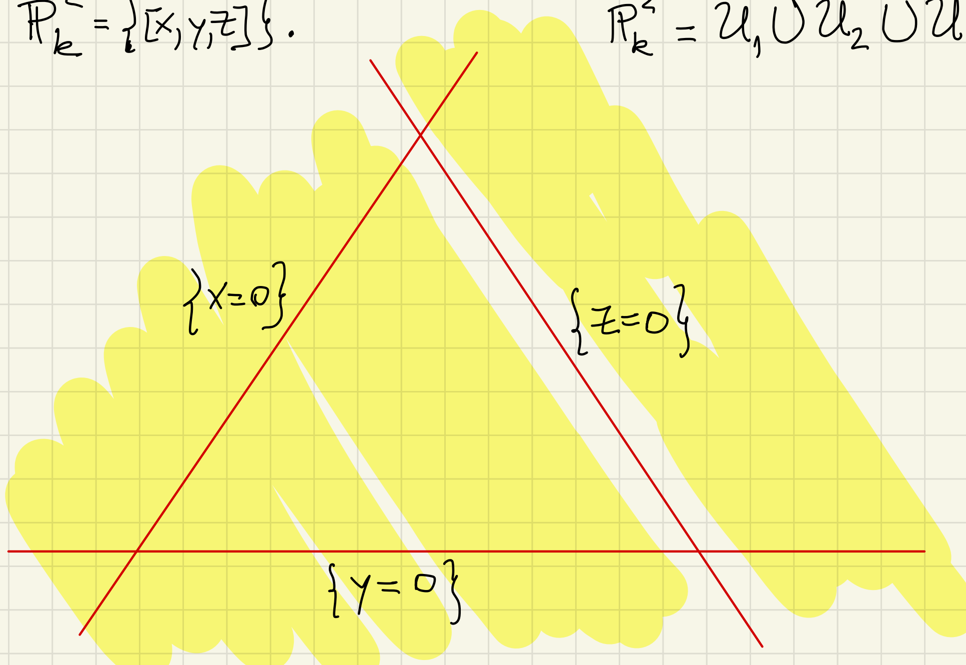
$U_3 = \{z \neq 0\}$

$\parallel$

$\mathbb{A}^2_{x,y}$

$\parallel$

$\{[x,y,1]\}$



¡Notar que $\mathbb{P}^2_k$ se piensa como plano!

Cuidado: En este plano se distorsionan distancias al pensar en $\mathbb{R}$.

Ej.- Graficemos rectas.

$$L = \{x+y+1=0\} \subset \mathbb{A}^2_k = U_3 \supset L_a = \{x+y+a=0\}, \quad a \neq 1$$

$L_a \parallel L$ en $\mathbb{A}^2_k$

$$\overline{L} = \{x+y+z=0\}$$

$$\overline{L_a} = \{x+y+az=0\}$$

Si $z=0$

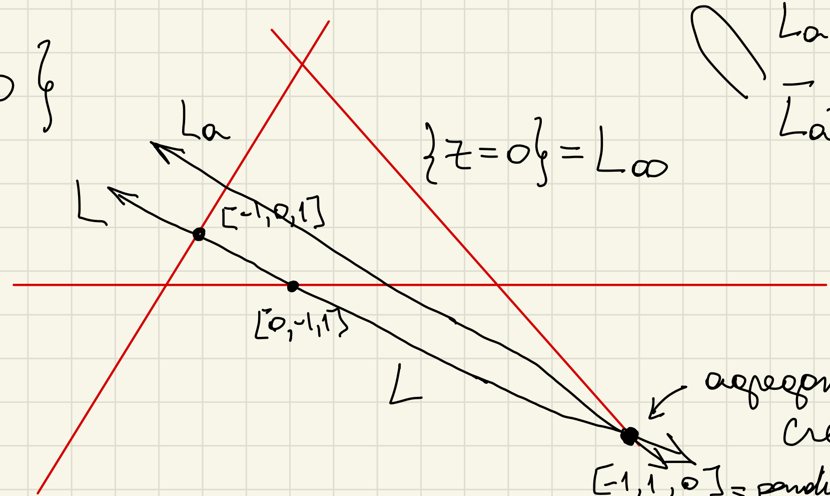
$\Rightarrow x=-y$

$[-y,y,0]$ $y\neq 0$

$= [-1,1,0]$

Si $z=0$

$\Rightarrow x=-y$



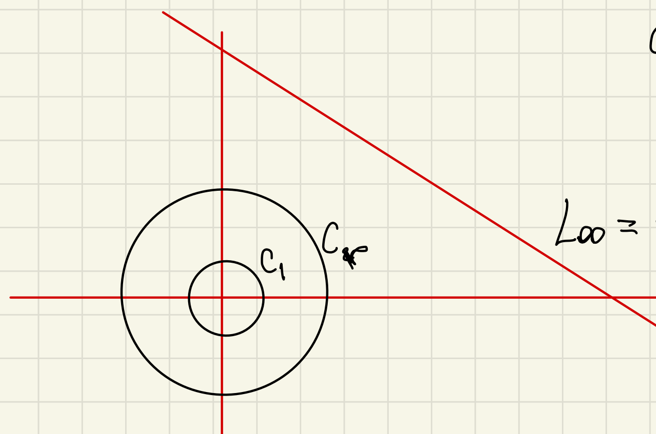
Así todas las rectas paralelas a L pasan por $[-1,1,0]$.

$\therefore$ En $\mathbb{P}^2_k$ las <u>rectas</u> son $\{ax+by+cz=0\}$ (por definición)

y compactificación $L = \{ax+by+c=0\}$.

$\therefore$ En $\mathbb{P}^2_k$ dos rectas <u>nunca</u> son paralelas:
o coinciden o se intersectan en 1 punto.

Ej.-



$L_\infty = \{z=0\}$

$C_1 = \{x^2+y^2=1\}$

$C_r = \{x^2+y^2=r\}$

$C_1 \cap C_r = \emptyset$ si $r \neq 1$ en $\mathbb{A}^2_k$

¿Qué pasa en $\mathbb{P}^2_k$?

En $\mathbb{P}^2_k$: $C_1 \subset \overline{C_1} = \{x^2+y^2=z^2\}$
$C_r \subset \overline{C_r} = \{x^2+y^2=rz^2\}$ $\subset \mathbb{P}^2_k$

Si $z=0 \Rightarrow$ $x^2+y^2=0$
$x^2+y^2=0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}\,y \Rightarrow \overline{C_1}\cap\overline{C_r} = \{[\sqrt{-1},1,0],[-\sqrt{-1},1,0]\}$

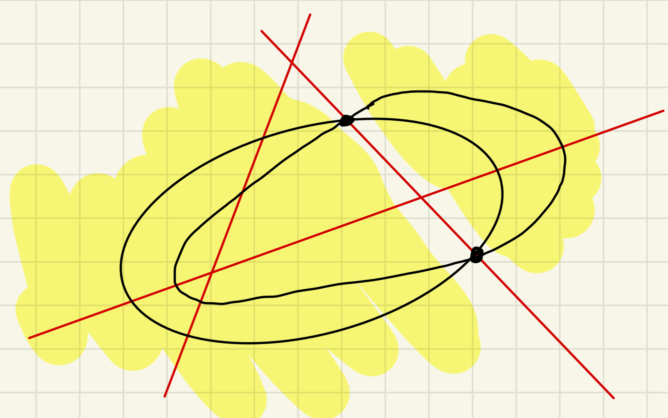
El dibujo de verdad es:

$k=\overline{k}$

$\mathcal{U}_1$

$\{1+y^2=z^2\} = \overline{C_1}|_{\mathcal{U}_1}$

$\overline{C_r}|_{\mathcal{U}_1} = \{1+y^2=rz^2\}$



En $\mathbb{P}^2_k$ los $\overline{C_1}, \overline{C_r}$ si se intersecan!
(fuera paralelismo)

Fin.