«Ten points on a cubic»
arXiv: 2105.12058 v1

Hexagrammum Mysticum

iga

27/Mayo/21

conjuntos algebraicos proyectivos

§4.2 Conjuntos algebraicos proyectivos.

Vimos $\mathbb{P}^n_k$ = esp. proy. dim n $= \mathbb{A}^n_k \sqcup \mathbb{P}^{n-1}_k = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$
donde $\mathcal{U}_i \equiv \mathbb{A}^n_k$.

Dentro de $\mathbb{P}^n_k$, se definen conj. alg. a través de polinomios homogeneos.

$$[x_0, x_1, x_2] \in \{ x_0^2 + x_1^2 + 1 = 0 \} \subset \mathbb{P}^2_k$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^2(x_0^2 + x_1^2) + 1 = 0 \quad \forall \lambda \in k \setminus \{0\}$$
$$-\lambda^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$
$$\{ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \} \text{ ahora si!}$$

Def.- Un conj. algebraico proyectivo es
$$V(S) = \{ x \in \mathbb{P}^n_k : F(x) = 0 \quad \forall F \in S \}$$
donde S = conj. polinomios homogeneos.

Ej.- Notar que $\{ x_0^2 + x_1^2 + x_2 = 0 \}$ tiene sentido $\ni [a, b, c]$
pero
$$\{ x_0^2 + x_1^2 = 0 \,,\ x_2 = 0 \} = V$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^2(a^2 + b^2) + \lambda c = 0 \quad \forall \lambda \in k \setminus \{0\}$$
$$\Rightarrow \quad V = \{ [\pm\sqrt{-1}, 1, 0] \} \text{, i.e., dos puntos.}$$

Obs.- Dicho eso, $I = \langle S \rangle \Rightarrow V(I) = V(S)$ en la definición.

Def.- $\forall X \subset \mathbb{P}^n$ conj. arbitrario,
$$I(X) = \{ F \in k[x_0, \dots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X \}$$
es el <u>ideal de X</u>. Este ideal es <u>homogeneo</u>, i.e., si $F = \sum F_i \in I \Rightarrow F_i \in I \ \forall i$.
F_i homogeneos

Prop.- I ideal homogeneo $\iff$ está generado por un número finito de formas.

Dem.- • $I = (F_1, \dots, F_m)$ + homogeneo $\Rightarrow I = (F_{ij})$ $\Longrightarrow$

$\leftarrow$ homogeneos.

$\Longleftarrow$ • Sea $I = (F_1, \dots, F_m)$ F_i son formas con $\deg(F_i) = d_i$

$F = \sum_{j=m}^{r} G_j \in I$ G_j formas $m > r$. queremos mostrar que $G_m \in I$.

• Como $F = \sum A_i F_i$ (formas) (no formas). $\sum G_j = \sum A_i F_i$ y comparar terminos mismo grado (grado m debe sobrevivir)

$$\Rightarrow G_m = \sum A'_{m-d_i} F_i \in I \quad \blacksquare$$

Lema: (def: $V \subset \mathbb{P}^n$ alg. es ired. si no es la unión de dos conj. alg. más pequeños (no trivial) IGUAL que ANTES)
(Dem. Tarea)

V irreducible $\iff$ $I(V)$ es primo.

Def.- Un conj alg. ired en $\mathbb{P}^n_k$ se llama <u>Variedad projectiva</u>.

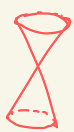
Lema: Todos los conj. alg. proy. se descomponen en unión finita de var. proyectivas (único salvo orden).
(Dem. Tarea)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ideales homog. en} \\ k[x_0, \dots, x_n] \end{array} \right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conj alg. en} \\ \mathbb{P}^n_k \end{array} \right\}$$

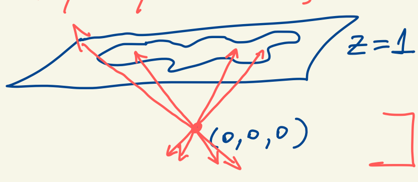
¿Cuál es el Nullstellensatz en este formato?

Si V es un conj. algebraico en $\mathbb{P}^n_k$, se define ...

[Conos generalizados en $\mathbb{R}^3$: considere los ceros de un polinomio homogeneo

$\{x^2 + y^2 = z^2\}$ = 

$\{x^3 + x^2y + 2y^3 + z^3 = 0\}$ = cono :)



]

$$C(V) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^{n+1} : [x_0, \dots, x_n] \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$$

es el cono de V (es variedad afín!).

$(k = \bar{k})$

Teo: I ideal homogeneo en $k[x_0, \dots, x_n]$. Entonces,

(1) $V_p(I) = \phi \iff \exists N$ tal que I contiene todas las formas de grado $\geq N$ (ie $I \supset (x_0, \dots, x_n)^N$).

(2) Si $V_p(I) \neq \phi \Rightarrow I(V_p(I)) = \text{Rad}(I)$.

Dem: Tarea ∎

Def/ $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ var. proyectiva $\Rightarrow I(V)$ ideal primo

$\Rightarrow \Gamma_h(V) := k[x_0, \dots, x_n]/I(V)$ dominio

(anillo coord. homog. de V)

[**obs:** No podemos ver $\Gamma_h(V)$ como anillo de funciones polinomiales ya que la evaluación en $[\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$ no quedará bien definida]

Prop/.- Todo elemento $f \in \Gamma_h(V)$ se puede escribir de forma única como suma de formas homogeneas.

Dem/ Tarea ∎

Def/.- $K_h(V)$ = cuerpo de fracciones de $\Gamma_h(V)$.

Ej/ $V = \mathbb{P}_k^1$, $\Gamma_h(V) = k[x_0, x_1]$, $K_h(V) = k(x_0, x_1)$.

$\cup$

$\mathbb{A}_k^1$ $\quad k(t) \simeq K(\mathbb{P}_k^1)$ $\quad t = \frac{x_0}{x_1}$ $\quad \frac{x_0^2 + x_1^2}{x_0 x_1} = \frac{t^2+1}{t}$

Def/ $K(V)$ = cuerpo de funciones racionales en V

$= \left\{ z \in K_h(V) \;/\; z = \frac{f}{g} \text{ con } f, g \in \Gamma_h(V) \text{ formas homog. del mismo grado} \right\}$

$\subset K_h(V)$

$k \subset K(V)$ es cuerpo ✓✓✓ $\subset K_h(V)$

[obs !!! $K(V)$ serán isomorfos al $K(V_{afín})$]

¿De dónde sacaremos funciones regulares en V?

$\Gamma(V) =$ funciones regulares en V afín $= \bigcap_{\substack{P\in V \\ (k=\bar{k})}} \mathcal{O}_P(V)$ [afín]

$\cong \mathcal{O}_P(V_{afín})$

[Proyectivo inicio] $\mathcal{O}_P(V) = \left\{ z \in K(V) : \exists f, g \; z = \frac{f}{g},\ g(P) \neq 0 \right\}$

$\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_P(V) \subset K(V)$

$$k = \left\{ \frac{f}{g} : \underset{\text{en cada parche}}{g(P) \neq 0} \right\} = \bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_P(V) \quad , \quad V \text{ variedad proyectiva}$$

(Desafío)

$\mathbb{P}^1_{\boxed{k}} \leftarrow$ hacerlo $\mathbb{A}^1_t \xrightarrow{t \mapsto \frac{1}{t} = u} \mathbb{A}^1_u$

$t+1 = p(t) \mapsto \frac{1}{u} + 1$