iago

1-Junio-21

Afín V/S proyectivo

... Estabamos en variedades proyectivas (irreducible)

$$V(S) = V(I) = \{ x \in \mathbb{P}^n : F(x) = 0 \ \forall F \in I \}$$

homogeneo

con I = ideal homogeneo, $I(V)$ es primo.

$$\Gamma_h(V) = k[x_0, \dots, x_n] / I(V)$$

$$\cap$$

$$K_h(V) = \text{cuerpo de fracciones de } \Gamma_h(V)$$

$$\cup$$

$K(V)$ = cuerpo de funciones racionales en V

$= \{ \frac{f}{g} \in K_h(V) : f, g$ son formas del mismo grado $\} \cup \{0\}$

Def: Si $P \in V$, $z \in K(V) \Rightarrow z$ definido en P si $\exists\, z = \frac{f}{g}$ con $g(P) \neq 0$.

Anillo local en $P \in V$ $= \mathcal{O}_P(V) = \{ z \in K(V) : z \text{ definido en } P \}$

$$\cup$$

$$\mathfrak{m}_P(V) = \{ z : z(P) = 0 \}.$$

Tarea: Si $V_{\text{afín}} \subset V$, entonces $K(V_{\text{afín}}) \simeq K(V)$.

$V_{\text{afín}} = V \cap \mathcal{U}_n \quad (\mathcal{U}_n = \{ x_n \neq 0 \})$ $\quad \mathcal{O}_P(V_{\text{afín}}) \simeq \mathcal{O}_P(V)$.

Obs.- Un cambio de coordenadas proyectivo es un $T : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que

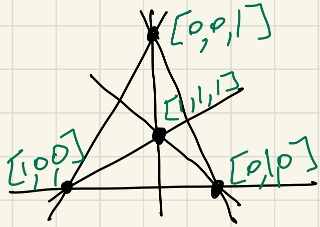
$$T([x_0, \dots, x_n]) = A \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde $A \in GL(n+1, k)$.

Ej.- (Tarea) Dada la configuración de 6 rectas

$$\mathcal{A} = \{ xyz(x-y)(x-z)(y-z) = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^2_k$$

$=$



, tenemos que toda configuración de 6 rectas con 4 ptos triples y 3 puntos dobles es proyectivamente equiv. a $\mathcal{A}$. [Encontrar $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ cambio coord. $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}$].

§4.3 Var. afines vs proyectivas. $(k = \bar{k})$

Def.- Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ conj alg., $I = I(V) \subset k[x_0, \dots, x_{n-1}]$.

$$I^* = \{ F^* : F \in I \} \subseteq k[x_0, \dots, x_n] \quad \left(\text{homogeneización de } I\right)$$

$$\therefore \quad V \rightsquigarrow V^* := V(I^*) \subset \mathbb{P}^n.$$

Def. (al revés) Dado $V \subseteq \mathbb{P}^n$ conj proy., $I = I(V) \subseteq k[x_0,\dots,x_n]$

$$\Rightarrow \quad I_* = \{ \underset{(x_n=1)}{F_*} \ / F \in I \} \subseteq k[x_0,\dots,x_{n-1}] \quad \left(\begin{array}{c}\text{deshomog.}\\ \text{de } I\end{array}\right)$$

$$\text{y} \quad V_* := V(I_*) \subset \mathbb{A}^n (= \mathcal{U}_n).$$

¡Cuidado! (4.20) Sea $V = V(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{A}^3$.

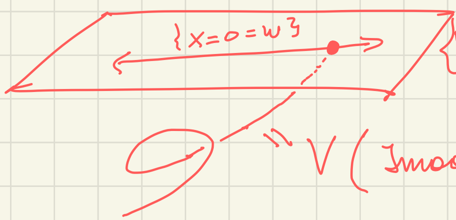
(a) $I(V) = (y-x^2, z-x^3)$. ✓ $\qquad y^3 - z^2 \in I(V)$

(b) $zw - xy \in I(V)^* \subset k[x,y,z,w]$ $\qquad \Rightarrow y^3 - z^2 w \in I(V)^*$

y $zw - xy \notin (wy - x^2, w^2 z - x^3)$. $\qquad \Rightarrow$ si $w = 0$ $\Rightarrow y = 0$.

Notar que $\{wy - x^2 = 0, \ w^2 z - x^3 = 0\} = W \subset \mathbb{P}^3$

Si $w = 0$
$\Rightarrow -x^2 = 0$
$\quad -x^3 = 0$
$\Rightarrow x = 0$



$\{w = 0\} = \mathbb{P}^2$

$\| \ V$ (Imagen de $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$)

¿Quién es V^*? hay que homogenizar cada uno de los pol. en $I(V)$: $\quad x(y - x^2) - (z - x^3) = xy - z \in I(V)$

$$(xy - z)^* = xy - zw \in I(V)^*.$$

$$\Big[\ [u^2 t, ut^2, t^3, \underset{\|\,0}{u^3}] = [0, 0, 1, 0] \ \Big]$$

Notación: $\varphi_{n+1} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathbb{P}^n$
$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_0, \dots, x_{n-1}, 1]$

Prop: (1) $V \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow \varphi_{n+1}(V) = V^* \cap \mathcal{U}_{n+1}$,
y $(V^*)_* = V$.

(2) $V \subset W \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow V^* \subset W^* \subset \mathbb{P}^n$.
$V \subset W \subset \mathbb{P}^n \Rightarrow V_* \subset W_* \subset \mathbb{A}^n$.

(3) V irred. en $\mathbb{A}^n \Rightarrow V^*$ irred. en $\mathbb{P}^n$

(4) $V = \bigcup_i V_i$ descomp. en irred. en $\mathbb{A}^n$
$\Rightarrow V^* = \bigcup_i V_i^*$ descomp. irred en $\mathbb{P}^n$.

(5) $V \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow V^* =$ conj. alg. más pequeño que contiene a $\varphi_{n+1}(V)$.

(6) $\phi \neq V \subsetneq \mathbb{A}^n \Rightarrow V^*$ no tiene componentes en H_∞ o que contengan a H_∞.

$H_\infty = \{x_n = 0\}$

(7) Si $V \subset \mathbb{P}^n$ y V no tiene componentes en H_∞ o que contengan a H_∞
$\Rightarrow V_* \subsetneq \mathbb{A}^n$ y $(V_*)^* = V$.

- Si $V \subset \mathbb{A}^n$ es conj alg $\Rightarrow V^*$ es su <u>clausura proyectiva</u>.

- Si $f \in \Gamma_h(V^*)$ forma de grado d
$\Rightarrow f_* \in \Gamma(V)$ como el deshomogenizado f.

$\therefore \ \alpha : K(V^*) \longrightarrow K(V)$, $\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f_*}{g_*}$

$\mathcal{O}_P(V^*) \subset K(V^*)$, $\mathcal{O}_P(V) \subset K(V)$

y es un isomorfismo (Torea).

Si $P \in V \Rightarrow$ considerarlo como $p \in V^*$

y otra vez α, $\mathcal{O}_p(V^*) \simeq \mathcal{O}_p(V)$.

(se identifican).