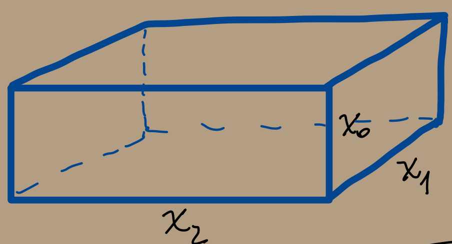
El problema del cuboide (y su superficie)



Euler

¿Existirá caja con lados enteros (positivos) y diagonales enteras?

$$\mathbb{P}^6 \supset \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + x_1^2 = x_4^2 \\ x_2^2 + x_0^2 = x_5^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_6^2 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \end{array} \right.$$

Es una superficie irreducible en $\mathbb{P}^6$

- Qué sabemos? No sabemos.
- conjetura de Bombieri-Lang.

Salvo imágenes de $\mathbb{P}^1$ o (cúbicas suaves en $\mathbb{P}^2$) que deberían ser finitos, fuera hay sólo finitos puntos racionales.

iga 23

8/Junio/21

Curvas planas proyectivas

ahora sí!

... Sigamos un poco más con

$$\mathbb{P}^1_{x,y}\times\mathbb{P}^1_{u,v} = \{z_0z_3=z_1z_2\}\subset\mathbb{P}^3$$

(Segre)

$$\cup$$

$$E=\{ux^2+vy^2=0\}$$

$$E\subset\mathbb{P}^1_{x,y}\times\mathbb{P}^1_{u,v}\longrightarrow\mathbb{P}^3$$

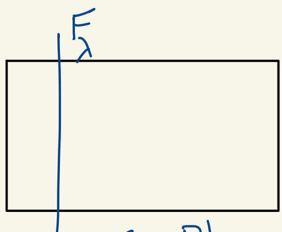
$$[\underset{z_0}{\overset{\parallel}{xu}},\underset{z_1}{\overset{\parallel}{xv}},\underset{z_2}{\overset{\parallel}{yu}},\underset{z_3}{\overset{\parallel}{yv}}]$$

$$\mathbb{P}^1_{x,y}\times\mathbb{P}^1_{u,v}=\{z_0z_3=z_1z_2\}$$

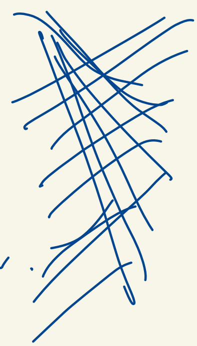
$$E=\{u(ux^2+vy^2)=0,\ v(ux^2+vy^2)=0\}$$

$$E=\{z_0^2+z_2z_3=0,\ z_0z_1+z_3^2=0\}$$

$$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1=$$



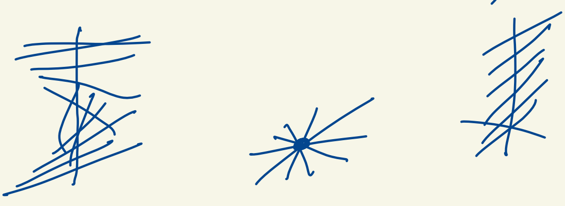
F_λ $\quad\mathbb{P}^1$ $\quad\mathbb{P}^1$



$\lambda\in k$.

$$F\subset\quad\{x=\lambda y\}$$

$$F=\{z_0=\lambda z_2,\ z_1=\lambda z_3\}\ \text{recta :)}$$



§5.1 Definiciones: Curvas planas proyectivas.

($k=\bar{k}$)

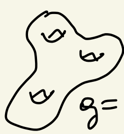
$$F = V = \{F_d(x,y,z)=0\} \subset \mathbb{P}^2_k$$

$\parallel$

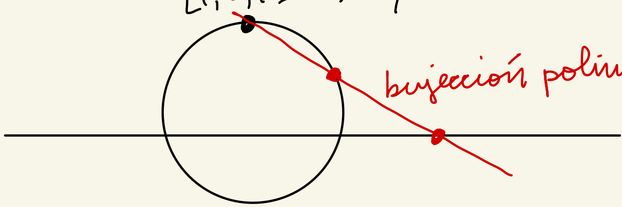
curva plana proy.

irreducibles no singulares

$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$\dots$ d
$Ax+By+Cz=0$ rectas	cónicas	cúbicas $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ λ el par.	cuárticas (no son todas las $g=3$)	

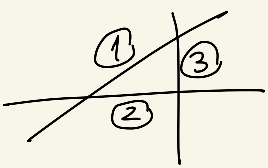
 $=\mathbb{P}^1$ $g=0$  $=\mathbb{P}^1$ $g=0$  $=\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$ $g=1$  $g=3$

$$g=\frac{(d-2)(d-1)}{2} \quad (k=\mathbb{C})$$



"Moduli of curves"
Harris y Morrison

→ habrán componentes múltiples y simples, <u>No</u> serán necesariamente irreducibles.

Ej.: 

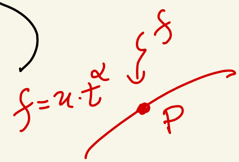
← curva grado 6 puede degenerar a ese Δ con mult.

→ los $\mathcal{O}_P$ para una irred. serán identificados (afín vs proy)

→ hay mult. para cada punto $P \in V$: m_P.

→ Si P es no singular ($\iff m_P = 1$)

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_P(F)$ es un DVR.



Luego tenemos función $\mathrm{ord}_P^F(\_\_)$ ← función racional de F

Si $G \in k[X,Y,Z]$ forma de grado d

y L = recta $\not\ni P \in F$

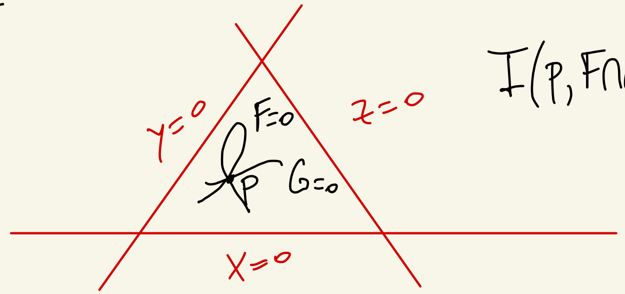
$$\Rightarrow \quad G_* = \frac{G}{L^d} \in \mathcal{O}_P(F) \quad \text{y}$$

$$\mathrm{ord}_P^F(G) := \mathrm{ord}_P^F\left(\frac{G}{L^d}\right).$$

→ Si F, G son curvas planas proy. cuales quiera y $P \in \mathbb{P}^2$

$$\Rightarrow \quad I(P, F \cap G) := \dim_k \left(\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2) \big/ (F_*, G_*) \right)$$

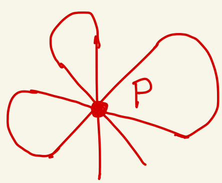
∴ es independiente del L elegido y satisface todo lo que vimos en intersección local. (satisface los axiomas (1)–(7) y las otras propiedades)



$$I(P, F\cap G) = I(P, F_* \cap G_*)$$

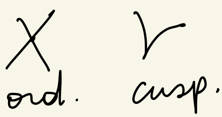
→ L tangente a F si $I(P, F\cap L) > m_P(F)$.

→ P punto mult. ordinario de F si tiene $m_P(F)$ tangentes dist. en P.



$\{F=0\}$

$m_P = 2$:



$m_P = 3$: ..... casos ⟶ estudio de sing curvas planas ...

→ F y G curvas son <u>proyectivamente equiv.</u> si $\exists\, T$ cambio de coord. tal que $F = G^T$.

— o —