Recordemos «On the 14-th Problem of Hilbert»

Masayoshi Nagata

(American Journal of Mathematics 1959)

La conjetura de Nagata: n puntos en posición general en $\mathbb{P}^2$

$\times r_1$ $\times r_2$ $\times r_3$ $\dots$ $\times r_n$

Si $\exists$ curva de grado d pasando con mult. $\geq r_i$ por los puntos

$$\Rightarrow \quad d > \frac{1}{\sqrt{n}}(r_1 + \dots + r_n)$$

La conjetura SHGH ...

igo 23

10/Junio/21

Sistemas lineales de curvas

(solo 6 clases más!)

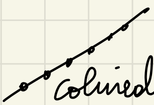
§5.2 Sistemas lineales de curvas.

→ Notar que las curvas de grado d corresponden a un único punto en $\mathbb{P}^{N-1}$, $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

Ej.- Rectas $(d=1)$: $\{a_0x+a_1y+a_2z=0\} = L$

Dar una recta es lo mismo que dar $[a_0,a_1,a_2]\in\mathbb{P}^2$

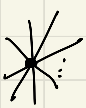
∴ El espacio de parámetros de curvas de grado 1 es $\mathbb{P}^2$. $\left[N=\frac{(1+1)(1+2)}{2}=3\right]$.



Si $k=\mathbb{R}$, entonces dados finitos puntos no colineales, siempre existe 1 recta que pasa por exactamente 2 de esos puntos.

[$k=\mathbb{C}$: no es cierto] $\Updownarrow$ dualidad

$\{(x^3-y^3)(x^3-z^3)(y^3-z^3)=0\}$



Dadas finitas rectas no concurrentes todas entonces existe un punto por donde pasan exactamente dos rectas.

son 9 rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, tiene 12 puntos triples y nada más.

Ej: $d=2$: $\{a_0x^2+a_1y^2+a_2z^2+a_3xy+a_4xz+a_5yz=0\}$

$$C \in [a_0,a_1,\dots,a_5]\in\mathbb{P}^5$$

$$\cup$$

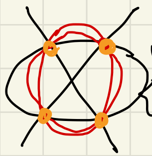
$\{F(a_0,\dots,a_5)=0\}$ = conj. alg. que describe cónicas singulares dim formas de grado d en 3 variables $= \binom{d+2}{2} = N$.

$\to$ Condiciones sobre curvas de grado d $\Longrightarrow$ subconj. de $\mathbb{P}^{N-1}$.

Si ese subconj es var. lineal $\Rightarrow$ sistema lineal de curvas planas.

Ejl.- $F_{[a,b]} = \{ a \cdot F_1 + b F_2 \ : \ [a,b] \in \mathbb{P}^1 \}$

$\{F_1 = 0\}$



$\{F_2 = 0\}$

$\times P$

$0 = a F_1(P) + b F_2(P)$

$\mathbb{P}^5$ = esp. de cónicas

$\cup$

la recta que pasa por F_1 y F_2

Péncil de curvas

Lema : (1) $P \in \mathbb{P}^2$ fijo.

$\therefore$ $\{$curvas de grado d que contienen a p$\}$ = Hiperplano $\subset \mathbb{P}^{N-1}$.

(2) $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ cambio de coord.

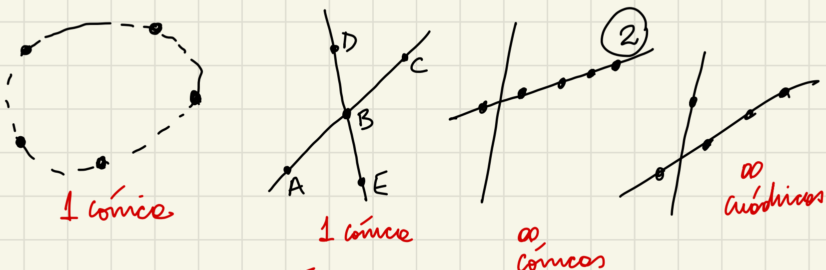
$\Rightarrow F \mapsto F^T$ es un cambio de coord. $\mathbb{P}^{N-1} \to \mathbb{P}^{N-1}$, inversa $F \mapsto F^{T^{-1}}$.

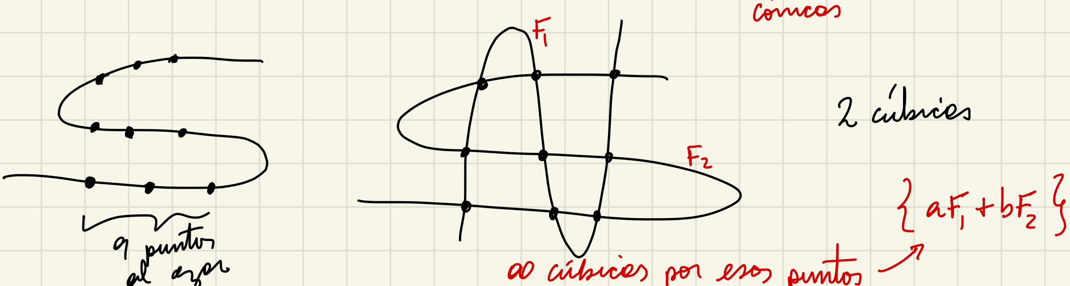
Dem.- (1) al evaluar F en P se define el hiperplano en $\mathbb{P}^{N-1}$. ∎

→ Así curvas de grado d pasando por puntos dados forman un sistema lineal.
Como n planos intersectan siempre en $\mathbb{P}^n$

⇒ Siempre existe una curva de grado d pasando por $\underbrace{\frac{d(d+3)}{2}}_{=N-1}$ puntos.

d = 1	d = 2	d = 3	...	
2	5	9	...	





⇒ No hay otra cúbica por esos 9 pts.

→ Fijar $P \in \mathbb{P}^2$ y $r \leq d+1$. Luego

$$\{F \in \mathbb{P}^{N-1} : \text{con } m_P(F) \geq r\} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

es un sistema lineal de dimensión $\frac{d(d+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}$.

Dem) $p=[0,0,1]$, $F=\sum F_i(x,y)z^{d-i}$, F_i formas de grado i.

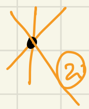
$m_p(F)\geq r \iff F_0=\dots=F_{r-1}=0$ $\quad \left[F=\underbrace{F_0+F_1+\dots}_{m_p=r \Rightarrow F_i=0,\ 0\leq i\leq r-1}+F_d\right]$

$F = \left[\underbrace{a_{ijk}}_{\text{coord. en } \mathbb{P}^{N-1}} x^i y^j z^k\right]$ ie coef de $x^i y^j z^k$ con $i+j<r$ son cero.

$$\{a_{ijk}=0 \ : \ i+j<r\} \subset \mathbb{P}^{N-1}$$

$$1+2+\dots+r=\frac{r(r+1)}{2} \quad \therefore \quad \frac{d(d+3)}{2}-\frac{r(r+1)}{2} \quad \blacksquare$$

Obs).- si $r=d+1 \Rightarrow$ No hay.
si $r=d \Rightarrow d=\dim$ Porque?

$d=1$  $d=2$ 

Tarea ¿Porqué hay 2 dim?