Álgebra lineal en geometría algebraica

¿Cómo puede ser tan complicado?

iga 24

15/Junio/21

curvas pasando por puntos multiples

Sean $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$

$r_1 \ \dots \ r_n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ mult.

$$V(d; r_1P_1, \dots, r_nP_n) := \{ \text{curvas } \overset{F}{\underset{d}{}} \text{ de grado} \in \mathbb{P}^{N-1} : m_{P_i}(F) \geq r_i \ \forall i \}$$

Es un <u>sistema lineal</u>, ie, variedad lineal en $\mathbb{P}^{N-1}$!

<u>Teorema</u>:

(1) $V(d; r_1P_1, \dots, r_nP_n)$ tiene dimensión $\geq \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i+1)}{2}$.

(2) Si $d \geq \sum_{i=1}^{n} r_i - 1$, entonces

$$\dim_k V(d; r_1P_1, \dots, r_nP_n) = \underbrace{\frac{(d+3)d}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i+1)}{2}}.$$

<u>obs</u>: (1) dimensión virtual : cuándo $\dim_k V >$ virtual ?

↪ sist. lineal especial : La conjetura SHGH caracteriza los sist. lin. especiales.

(2) virtual $= \underbrace{\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2}} - 1 - \sum_{i=1}^{n} r_i + 3d$

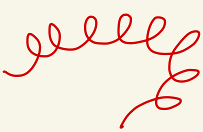
$\swarrow 0$

$-1 - 2\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 3d$

Pensar en curvas irred de grado d $\Longrightarrow$ Hartshorne p. 389

$\|$ género arit. de la una resolución de las sing. de la curva parcial ≥ 0

Verificar su existencia

Ejl.-  F_d con sólo nodos $r_i = 2 \ \forall i$ existen! (Tarea)

F_3  F_4  ...

$\#\text{nodos} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

(3) No apto: $n = m^2$, $r_i = 2 \ \forall i$

Si existe $\Rightarrow d > 2\sqrt{n}$, tomemos $d = 2\sqrt{n}+1$

$\therefore$ virtual $= \dfrac{(2\sqrt{n}+1)(2\sqrt{n}+4)}{2} - 3n \sim 2n - 3n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Dem: (1) Sigue de la clase anterior.

(2) Será por inducción en $m := \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) - 1$.

$m=1$: $d \geqslant m = 1 = \sum_{i=1}^{n} r_i - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i = 2$

$\Rightarrow \underbrace{r_1 = 2}_{V(d;\,2P)\ \checkmark}$ o $\underbrace{r_1 = 1,\ r_2 = 1}_{}$.

$[0,0,1]$ $[0,1,0]$ F_d

$\Updownarrow$

$\dfrac{d(d+3)}{2} - 2$ ✓

(Caso 1): Suponer que $r_i = 1 \ \forall i$

i.e. $V(d;\, P_1, \dots, P_n)$. Definir $V_i = V(d;\, P_1, \dots, P_i)$.

Mostraremos que $V_n \subsetneq V_{n-1}$ y luego aplicaremos inducción.

obs!.- En caso 1, $m = n-1$.

$d \geqslant n-2 \underset{\text{inducción}}{\Longrightarrow} \dim V_{n-1} = \dfrac{d(d+3)}{2} - n + 1$.

Por (1) $\dim V_n \geqslant \dfrac{d(d+3)}{2} - n$

Si $V_n \subsetneq V_{n-1} \Rightarrow \dim V_n < \dfrac{d(d+3)}{2} - n + 1$.

$\therefore \dim V_n = \dfrac{d(d+3)}{2} - n$.

¿Porqué $V_n \subsetneq V_{n-1}$?

<u>Resp</u>: Elegir líneas L_i que pasan por P_i y no por P_j $\forall j \neq i$ y $L_0 \not\ni P_i$ $\forall i$

$$\Rightarrow \quad F = L_1 \cdot L_2 \cdots L_{n-1} \cdot L_0^{d-(n-1)} \in V_{n-1} \setminus V_n .$$

(caso 2): Digamos que algún $r_i > 1$.
Digamos $r = r_1 > 1$ y $P = P_1 = [0,0,1]$.

- Sea $V_0 := V(d; (r-1)P, r_2P_2, \dots, r_nP_n)$, aquí sí vale inducción (ie sabemos dimensión).

- Para $F \in V_0$, sea

$$F_* = \underbrace{a_0 y^{r-1} + a_1 x y^{r-2} + \dots + a_{r-1} x^{r-1}}_{\text{si esto es cero} \Rightarrow F \in V} + \text{cosas de orden sup.}$$

$$\underset{M+r}{\overset{\shortparallel}{V_0}} \supsetneq \underset{\{a_0=0\}}{\overset{}{V_1}} \supsetneq \underset{\{a_0=a_1=0\}}{V_2} \supsetneq \dots \supsetneq V_r = V(d; rP, r_2P_2, \dots, r_nP_n) \Rightarrow M$$

$$V_i = \{ F \in V_0 \text{ tal que } a_j = 0 \ \forall j < i \}$$

Es suficiente mostrar que $V_{i+1} \subsetneq V_i$ $i = 0, 1, \dots, r-1$.

- Para mostrar $V_{i+1} \subsetneq V_i$, nos definimos:

$$W_0 = V(d-1; (r-2)P, r_2P_2, \dots, r_nP_n)$$

$$F \qquad F_* = a_0 y^{r-2} + a_1 x y^{r-3} + \dots + a_{r-2} x^{r-2} + \text{cosas de orden sup.}$$

$$W_i = \{ F \in W_0 : a_j = 0 \quad \forall j < i \}$$

Cada W_i es una hipersup. del anterior con lo que debemos tener $\subsetneq$ (inducción)

$$\underset{\text{ind.}}{\overset{M+r-1}{W_0}} \supsetneq W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq \dots \supsetneq \underset{\text{ind. } M}{W_{r-1}} = V(d-1; (r-1)P, r_2P_2, \dots, r_nP_n)$$

$\therefore$ Si $F_i \in W_i$ y $F_i \notin W_{i+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad y \cdot F_i \in V_i \,,\; y \cdot F_i \notin V_{i+1} \\ \qquad\qquad \forall\, i = 0, \dots, r-1 \\ \text{y} \quad x \cdot F_{r-2} \in V_{r-1} \,,\; x F_{r-2} \notin V_r \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \neq V_{i+1} \quad \forall\, i = 0, \dots, r-1, r-2 \quad \blacksquare$$

—— o ——

[$F = a_0 y^{r-2} + a_1 y^{r-3} x + \dots + a_{r-2} x^{r-2} + \text{cosas}$

$\Rightarrow$ Si $F_i \in W_i \setminus W_{i+1}$ $\quad a_i \neq 0 \quad i < r-1$

$a_0 = \dots = a_{i-1} = 0$

entonces $yF_i \in V_i$ pero $yF_i \notin V_{i+1}$

Por otro lado, para $i = r-2$ usamos

$F_{r-2} \in W_{r-2} \setminus W_{r-1}$ y

$xF_{r-2} \in V_{r-1}$ pero $xF_{r-2} \notin V_r$]