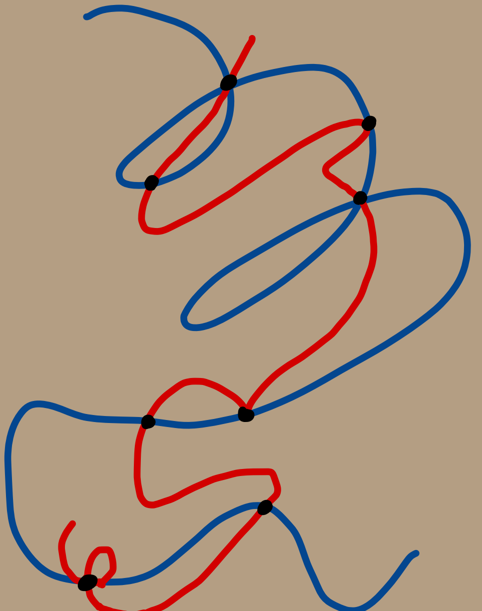


ige 25

17 / Junio / 21

Bézout

§5.3 Teorema de Bézout. (Étienne Bézout 1730-1783)

Teo: $(k=\bar{k})$ Sean F y G curvas proyectivas planas de grados m y n. Asumir F y G no tienen componentes comunes.

$$\Rightarrow \quad F\cdot G = \sum_{P\in\mathbb{P}^2} I(P;F\cap G) = m\cdot n .$$

dem:

deg $G=n$
deg $F=m$

- $F\cap G$ es finito.
- Asumir que $\{z=0\}\cap F\cap G=\phi$ [ya que podemos cambiar coordenadas y enviar la recta que queramos a $z=0$; elegir recta que no pase por $F\cap G$].

$$\therefore \quad \sum_P I(P;F\cap G) \underset{\text{(reducción)}}{=} \sum_P I(P;F_*\cap G_*) \underset{\text{(Teor antiguo)}}{=} \dim_k\left(k[x,y]\big/(F_*,G_*)\right).$$

$\Gamma_* := k[x,y]\big/(F_*,G_*)$ $\qquad \Gamma := k[x,y,z]\big/(F,G)$ $\qquad R:=k[x,y,z]$

Γ_d (Resp. R_d) = esp. vect.$|_k$ formas de grado d

Demostraremos: $\dim_k\Gamma_* = \dim_k\Gamma_d$ y $\dim_k\Gamma_d = m\cdot n$ ambos si d es grande.

(Paso 1) $\dim_k\Gamma_d = m\cdot n$ si $d\geq n+m$.

- $\pi: R \twoheadrightarrow \Gamma$ cociente $\qquad \varphi: R\times R \to R$, $(A,B)\mapsto AF+BG$

y $\psi: R\to R\times R$, $C\mapsto (GC,-FC)$

morfismos de anillo. Luego, como $\mathrm{mcd}(F,G)=1$

$$\Rightarrow \quad 0\to R \xrightarrow{\psi} R\times R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 0$$

es exacto.

y lo es grado a grado: si $d \geq m+n$

$$\Rightarrow \quad 0 \to R_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\varphi} R_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \to 0$$

$\therefore$ Como R_s tiene dim $\frac{(s+2)(s+1)}{2}$, podemos usar

$$\dim \Gamma_d = \dim R_d - (\dim R_{d-m} + \dim R_{d-n}) + \dim R_{d-m-n}$$

para obtener $\dim_k \Gamma_d = m \cdot n$.

(Paso 2) $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, $\alpha(\overline{H}) = \overline{ZH}$ es 1-1.

- Tenemos que mostrar

$$ZH = AF + BG \Rightarrow H = A'F + B'G \quad \forall A', B'.$$

- Para $J \in k[x,y,z] = R$, escribir $J(x,y,0) =: J_0$.
- Como F, G y Z no tienen ceros comunes $\Rightarrow F_0, G_0$ son relativamente primos en $k[x,y]$.
- Si $ZH = AF + BG \Rightarrow A_0 F_0 = -B_0 G_0$
  $\Rightarrow B_0 = F_0 \cdot C$ y $A_0 = -G_0 C$, $\forall C \in k[x,y]$.
- Sea $A_1 = A + CG$ y $B_1 = B - CF$.
- Como $(A_1)_0 = 0$ y $(B_1)_0 = 0$ $\Rightarrow A_1 = ZA'$ y $B_1 = ZB'$, $\forall A', B'$.

- Como $ZH = A_1 F + B_1 G = ZA'F + ZB'G$ en $k[x,y,z]$
  $(A+CG)F + (B-CF)G = AF + BG$
  $\Rightarrow H = A'F + B'G$.

(Paso 3) Sea $d \geq m+n$, elegir $A_1, \dots, A_{mn} \in R_d$ tal que los residuos en Γ_d formen una base (de Γ_d). Sean $A_{i*} = A_i(x,y,1) \in k[x,y]$ y $a_i = \overline{A_{i*}} \in \Gamma_*$

p.d. $a_1, \dots, a_{mn}$ es base de Γ_*

Notar que α restringe a un isomorfismo $\Gamma_d \xrightarrow{\simeq} \Gamma_{d+1}$ si $d \geq m+n$, ya que $\dim_k \Gamma_{d+r} = mn$ $\forall r \geq 0$ y α es 1-1.

Luego $Z^r A_1, \dots, Z^r A_{mn}$ es base de Γ_{d+r}.

(a_i generan Γ_*): Sea $h = \overline{H} \in \Gamma_*$, $H \in k[X,Y]$.

$$\underbrace{Z^N \cdot H^*}_{\text{forma grado } d+r} = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i Z^r A_i + BF + CG \quad \forall \lambda_i \in k,\ B, C \in k[X,Y,Z]$$

$$\Rightarrow \quad H = (Z^N \cdot H^*)_* = \sum_{i=1}^{m\cdot n} \lambda_i A_{i*} + B_* F_* \cancel{+ C_* G_*}$$

$h = \sum \lambda_i a_{i*}$ en Γ_*

(a_i son l.i.): $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{mn} a_{mn} = 0$ suponer.

$\Rightarrow \quad \sum \lambda_i A_{i*} = BF_* + CG_*$

$\Rightarrow$ homogeneizando $\quad Z^r \sum \lambda_i A_i = Z^s B^* \cdot F + Z^t C^* \cdot G \quad \forall r,s,t$

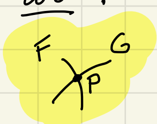
$\Rightarrow \quad \sum \lambda_i \overline{Z^r A_i} = 0$ en Γ_{d+r}

$\Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i$ ■

Cor: Si F, G no tienen componentes comunes

$$\Rightarrow \quad \sum_{P \in F \cap G} m_P(F) m_P(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G).$$

Cor: Si F y G se intersectan en $m \cdot n$ puntos



$\Rightarrow$ los cruces son transversales y F y G son suaves en esos puntos.

Cor: Si dos curvas de grados m y n tienen más de mn puntos en común $\Rightarrow$ Deben tener una componente en común.

obs. $\boxed{\text{loca}}$: Existen ∞ superficies como $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: suaves y proyectivas.

Por ej.: $X_d = \{x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0\} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

$\cup$ $3d^2$ rectas

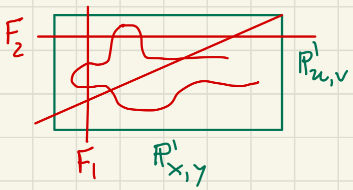
$\exists$ un Bézout para X_d !

Existirá teoría de intersección en las curvas $\subset X_d$

Pero el "espacio de curvas" para describir este Bézout es difícil de manejar: $Pic(X_d)$.

Para $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $Pic(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z} = \langle L \rangle$: $\underset{\Gamma}{mL} \cdot \underset{\Gamma'}{nL} = m\cdot n \cdot \underbrace{\overset{1}{\boxed{L\cdot L}}}_{\text{Bézout}} = m\cdot n$

Ej.- $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{x_0 x_3 = x_1 x_2\} \subset \mathbb{P}^3$



"Espacio de curvas" $= \langle F_1, F_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

Bézout es establecer:

$$bc+ad \underset{\text{Bézout}}{=} \underset{\Gamma}{(aF_1+bF_2)} \cdot \underset{\Gamma'}{(cF_1+dF_2)} \underset{\text{Bézout}}{=} ac\,\overset{0}{\boxed{F_1^2}} + (bc+ad)\,\overset{1}{\boxed{F_1\cdot F_2}} + bd\,\overset{0}{\boxed{F_2^2}}$$