Combinatoria y Geometría Algebraica

incidencias

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

$\Rightarrow$ 12 rectas con 16 puntos triples

¿Existirá tal configuración en $\mathbb{P}^2_k$, k = cuerpo algún?

<u>Resp</u>: sí, $k = \ldots$.

(3,4)-net

rojo/verde/azul

$\to$ cuadr. latino 4×4.

ige 26

22/6/21

Teorema Fundam. de Noether

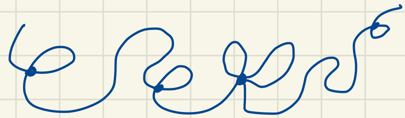
- Cuadrados Latinos que realizan config.
- Caso de grupos
- La gran pregunta sobre $\mathbb{C}$: $\exists!$ (4,b)-net sobre $\mathbb{C}$? y es la Hesse?

F, G sin comp. comunes

$\sum m_p(F) m_p(G) \leq \sum I(P, F\cap G) = \deg(F)\cdot \deg(G)$

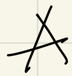
§5.4 Puntos múltiples.

grado d :



- Si F es curva y $F_x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{P\in F\cap F_x} \frac{m_p(F)\cdot(m_p(F)-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}$
  (sin comp. común)

  $\#$ puntos mult $\leq$



$n=3$ irred. : $\#$puntos $\leq \frac{6}{2} = 3$ (realidad es 1 a lo más).

3 pts mult

Teo: Si F es irreducible de grado n

$$\Rightarrow \sum_{P\in F} \frac{m_p(m_p-1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Esta desigualdad es óptima.

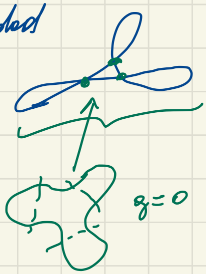
obs: $m_p = 2$ $\forall p \in F$ $(\alpha \text{ o } \prec)$ $\Rightarrow$ $\#$ puntos dobles $\leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

¿Existirán curvas tal que logramos $=$, i.e., $\#$pts dobles $= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$?

Resp: Sí. $n=3$ cúbica nodal o la cuspidal

$n=4$ 3 puntos dobles.

$\vdots$



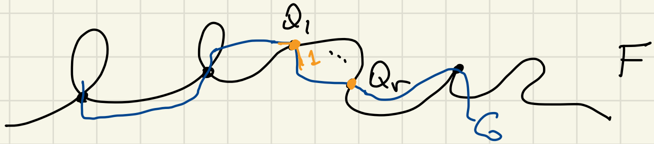
$g=0$

obs: r $\underbrace{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P\in F} \frac{m_p(m_p-1)}{2}}_{\text{género aritmético.}} \geq 0$

Dem: • Definir:

$$r := \frac{(n-1)(n-1+3)}{2} - \sum \frac{m_p(m_p-1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} - \sum \frac{m_p(m_p-1)}{2} \geq 0$$

- Elegir puntos suaves $Q_1, \dots, Q_r$ en F.



- Existe curva G de grado $n-1$ con

$$m_P(G) \geq m_P(F) - 1 \quad \forall P$$

y $\quad m_{Q_i}(G) \geq 1$.

$$\left[\begin{array}{l} V(n-1\,;\,(m_{P_1}-1)P_1, \dots, (m_{P_s}-1)P_s\,, Q_1, \dots, Q_r) \\ \Rightarrow \quad \dim V \geq \frac{(n-1)(n-1+3)}{2} - \sum \frac{(m_P-1)\,m_P}{2} - r = 0 \end{array} \right]$$

- Por Bézout : F irred y G de grado $n-1$ (no tienen factor común)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n\cdot(n-1) \geq \sum m_P(F)(m_P(F)-1) + r}_{\text{es lo que queremos.}}$$

■

$$\sum I(P, F\cap G) \geq \sum m_P(F)(m_P(F)-1) + r$$

§5.5 Teorema fundamental de Max Noether.

Def.- Un 0-ciclo en $\mathbb{P}^2$ es $\sum_{P\in\mathbb{P}^2} n_P \cdot P$ con $n_P \in \mathbb{Z}$

y $n_P \neq 0$ para finitos P.

$\therefore$ tenemos grupo abeliano libre generado por $\mathbb{P}^2$

Def.- grado $\left(\sum_{P\in\mathbb{P}^2} n_P P \right) = \sum n_P$.

y $\quad \sum n_P P \geq \sum m_P P \quad$ si $\quad n_P \geq m_P \quad \forall P$.

y positivo si $n_P \geq 0$.

Sean F, G curvas proy planas grados m, n resp sin factores comunes.

$$F \cdot G := \sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(P, F \cap G)\, P .$$

es un 0-ciclo positivo de grado mn.

<u>Propiedades</u>:

(1) $F \cdot G = G \cdot F$.
(2) $F \cdot (GH) = F \cdot G + F \cdot H$.
(3) $F \cdot (G + AF) = F \cdot G$.

} miran # intersección

(Max Noether) Si F, G, H son curvas con
1844-1921

$$H \cdot F \geq G \cdot F$$

¿ $\exists$ B curva con $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$?

Para esto es suficiente <u>crear</u> $\boxed{H = AF + BG}$
$H \cdot F = B \cdot F + G \cdot F$.

* Sea $P \in \mathbb{P}^2$; F, G curvas sin comp. com a través de P
H otra curva.

(CN) condición de Noether: $H_* \in (F_*, G_*) \subset \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$

<u>Teorema</u>: F, G curvas planas sin comp. comunes; H curva plana.

$\exists$ $H = AF + BG$ $\iff$ (CN) vale $\forall p \in F \cap G$.
$\forall A, B$ formas

(global) (local)

dem: $\Rightarrow)$ trivial.

$\Leftarrow)$ Asumir $V(F,G,Z) = \emptyset$ (Como en Bezout)

- Tenemos $k[X,Y]/I_* \simeq \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}/\underbrace{I_*\mathcal{O}_i}_{\dim\, I(P_i;\, F\cap G)}$, $P_1, \ldots, P_N$.

$\Rightarrow$ H cumple (CN) implica $H_* \in I_* = \langle G_*, F_* \rangle$.

- Homogenizar: $Z^r H = AF + BG$ $\exists r, A, B$.

- Dem. Bezout: multiplicar por Z es 1-1 en $\Gamma = k[X,Y,Z]/I$

$\Rightarrow$ $H = A'F + B'G$ $\exists A', B'$

$\rightsquigarrow$ $H = \bar{A}F + \bar{B}G$ $\bar{A}, \bar{B}$ formas ■

<u>Prop</u>: F, G, H curvas y $P \in F \cap G$.

Luego (CN) vale para P cuando:

(1) F, G pasan transversal por P  y $H \ni P$.

(2) P es simple en F y $I(P, H\cap F) \geq I(P; G \cap F)$

(3) F y G con tangentes diferentes en P y

$$m_P(H) \geq m_P(F) + m_P(G) - 1.$$

<u>Cor</u>: Si

(1) F y G se encuentran en $\deg(F)\deg(G)$ puntos y H pasa por los puntos o

(2) Todos los puntos de $F \cap G$ son simples (suaves) para F y $F \cdot H \geq F \cdot G$.

$\Rightarrow$ $\exists$ curva B tal que $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$.