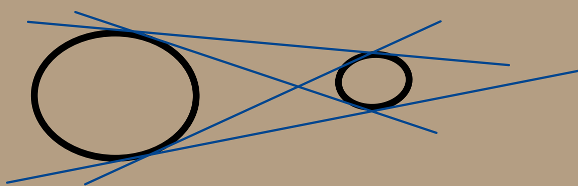
Maneras básicas de conteo en geometría algebraica



$\mathbb{P}^2 \longleftrightarrow \mathbb{P}^2$

puntos rectas

- Tangentes comunes y dualidad de curvas.
- dimensiones altas.
- cuerpo y mirada "por arriba".
- d vs $d(d-1)$
- cónica / cónica
- cúbica / séxtica con 9 cúspides

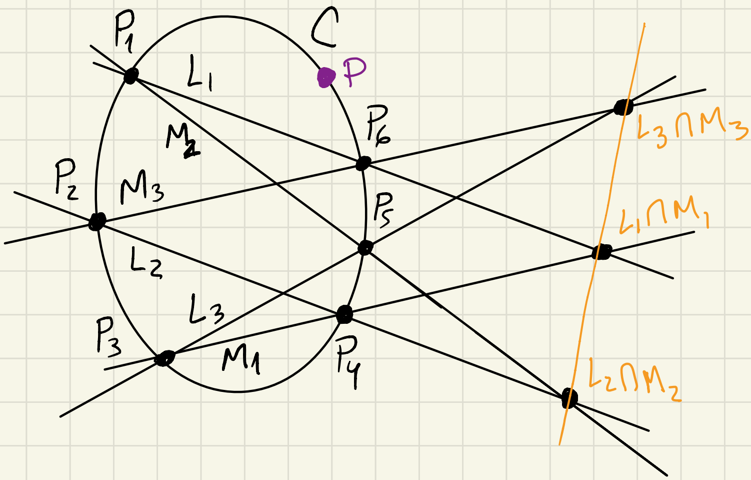
...

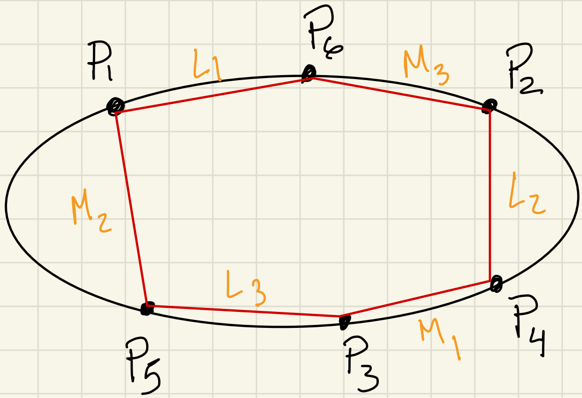
igo

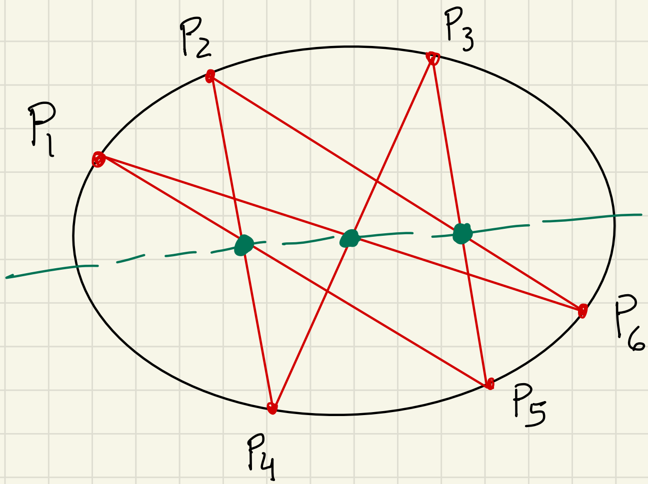
29/Junio/21

aplicaciones

Teorema de Pascal :







Dem: Idea es usar exceso de intersección y aplicar Bezout.

Sea
$$f_\lambda = \{ L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 + \lambda M_1 M_2 M_3 = 0 \}$$

son cúbicas y $\lambda \in k$. [Pencil de cúbicas]

Luego $P_1, P_2, \dots, P_6 \in f_\lambda$.

Considerar $P \in C$, $P \neq P_i$

$\Rightarrow \exists \lambda_p$ tal que $P \in f_\lambda$.

[$\overset{\neq 0}{L_1 L_2 L_3(P)} + \lambda_p \overset{\neq 0}{M_1 M_2 M_3(P)} = 0$
Luego despejar λ_p]

$\therefore \#(C \cap f_{\lambda_p}) \geq 7 \Rightarrow$ por Bezout que C y f_{λ_p} tienen factores comunes.

(Caso 1): C irreducible $\Rightarrow C \setminus f_{\lambda_p}$

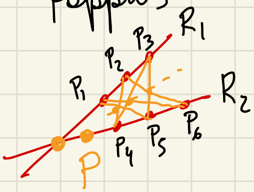
$\Rightarrow f_{\lambda_p} = C \cdot L$, donde $gr(L) = 1$

$$\underbrace{f_{\lambda_p}(L_i \cap M_i)}_{=0\ \forall i} = \underbrace{C(L_i \cap M_i)}_{\neq 0\ \forall i} \cdot L(L_i \cap M_i)$$

$\Rightarrow L(L_i \cap M_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3$.

(Caso 2): $C = R_1 R_2 \underset{(\text{Say})}{\Rightarrow} R_1 \nmid f_{\lambda_P}$

Pappus



$$f_{\lambda_P} = R_1 \cdot C' \qquad C' \text{ cónica}$$

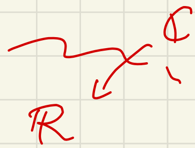
$$f_{\lambda_P}(P_j) = R_1(P_j) \cdot C'(P_j)$$

$$j = 4,5,6 \qquad \underset{j=4,5,6}{\overset{\#}{0}} \qquad \Rightarrow C'(P_j) = 0$$

$\Rightarrow$ Bézout C' y R_2 tienen factor común

$$\#(C' \cap R_2) = 3$$

$\Rightarrow$ $C' = R_2 L$ y el argumento termina como en caso 1 ∎



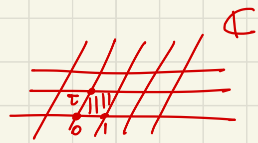
adaptable para muchos cuerpos.
solo se usa grado 2.
adaptable para degeneraciones de la degeneración geométrica

Tarea: Ver en Fulton demostración alternativa con Teorema $AF+BG$ de Max.

Queremos mostrar que una cúbica plana suave es un grupo abeliano: $(C = \text{cúbica}, \oplus)$.

obs: obvio, si $k = \mathbb{C}$, $C \underset{\text{analítico}}{\cong} \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$

$\cong$ (toro, $\oplus$)



$\bar{z} \oplus \bar{w} = \overline{z+w}$

Prop: C = cúbica irreducible
C', C'' cúbicas. Suponer

$C'\cdot C = P_1+P_2+\dots+P_9$ donde P_i puntos simples de C (no necesariamente distintos.), y suponer

$$C''\cdot C = P_1+P_2+\dots+P_8+Q \quad\Rightarrow\quad Q=P_9$$

dem:
- Sea L recta tal que $P_9\in L$ y $Q\notin L$.
- Escribir $L\cdot C = P_9+R+S$. $(R\neq S)$.
- $(L\,C'')\cdot C = L\cdot C + C''\cdot C = \underbrace{P_1+\dots+P_9}_{C'\cdot C}+Q+R+S$
- Como $P_1,\dots,P_9$ son simples para C $\Rightarrow$ C.N. y Teorema de Max dice $\exists\, L'$ tal que

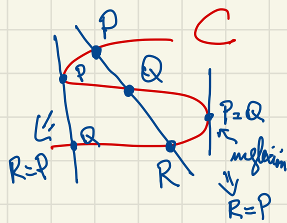
$$(L\,C'')\cdot C = (L'\,C')\cdot C$$

- Pero $L'\ni Q,R,S$ y $L\ni R,S \Rightarrow L'=L$

$$L\cdot C = P_9+R+S \qquad L'\cdot C = Q+R+S$$

$$\Rightarrow\quad P_9=Q \quad \blacksquare$$

¡En una cúbica se puede sumar!



C = cúbica no singular

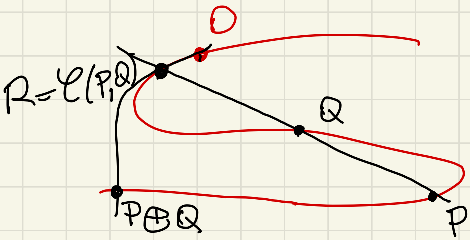
$\forall P,Q\in C \quad \exists!$ recta L tal que $L\cdot C = P+Q+R$
$\not\forall R\in C$

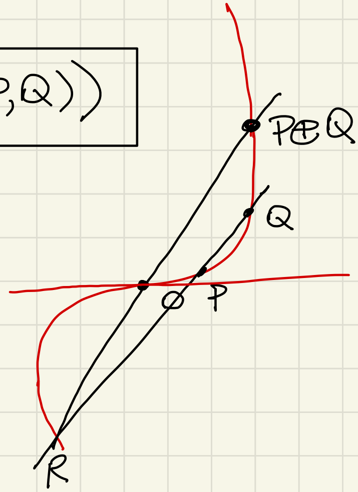
[Si $P=Q \Rightarrow$ se toma L tangente a C en P]

Definir $\varphi : C \times C \longrightarrow C$, $\varphi(P,Q) = R$ (como arriba)

Elegir $O \in C$ punto arbitrario

$$\Rightarrow \quad \boxed{P \oplus Q := \varphi(O, \varphi(P,Q))}$$





<u>Prop</u> : $(C, \oplus)$ es un grupo abeliano.

<u>dem</u> : • Sólo faltaría asociatividad...

• $P, Q, R \in C$. Sea $L_1 \cdot C = P + Q + S'$
$M_1 \cdot C = O + S' + S$, $L_2 \cdot C = S + R + T'$
$M_2 \cdot C = Q + R + U'$, $L_3 \cdot C = O + U' + U$
$M_3 \cdot C = P + U + T''$

• $(P \oplus Q) \oplus R = \varphi(O, T')$
$P \oplus (Q \oplus R) = \varphi(O, T'')$ suficiente mostrar $T' = T''$

• Ahora usar $C' = L_1 L_2 L_3$ $C'' = M_1 M_2 M_3$
y la proposición de arriba ∎

$$(C(\mathbb{Q}), \oplus) \underset{\text{Mordell Weil}}{\simeq} \mathbb{Z}^{r} \oplus \underset{\text{finito}}{G}$$

r → Gran problema calcularlo

$\mathbb{Q}$: cuerpo de #

$k = \mathbb{C}$

$\ldots \quad \mathbb{Z}/3 \,\circlearrowleft\, \{zy^2 = x^3 - z^3\} \longleftarrow \{zy^2 = x^3 + axz^2 + bz^3\} \simeq \mathbb{C}$

$\oplus$ explícito fórmulas.