UGA y otras cosas ...

iago28

1-Julio-21

Final I

§6. Variedades, Morfismos y mapeos racionales.

§6.1: Topología Zariski.

Topología = Colección de "abiertos" en X tal que:
(1) X y $\emptyset$ son abiertos, (2) $\bigcup_{\text{arb.}}$ abiertos = abierto, (3) abierto $\cap$ abierto = abierto.

Un esp. top. es un conj X con una topología.
C cerrado si $X \setminus C$ abierto.
Si $Y \subset X \Rightarrow Y$ tiene top. inducida por X a través de $Y \cap \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ abierto en X.

$Y \subset X \Rightarrow \overline{Y}$ = Clausura de Y en X = $\bigcap\limits_{\substack{Y \subset C \\ \text{cerrados}}} C$. Y es **denso** si $\overline{Y} = X$.

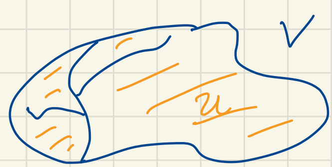
X, X' esp. topológico, $f: X' \to X$ es continua si $f^{-1}(\underset{\text{abierto}}{\mathcal{U}}) = \underset{\text{abierto}}{\mathcal{U}'}$.

Homeomorfismo es una f cont. con f^{-1} y cont.: $X' \simeq X$.

Def.- Sea $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$. La topología Zariski se define como $\mathcal{U}$ abierto si $\mathcal{U} = X \setminus \{\text{Conj. algebraico}\}$.

$V \subset X$ Variedad (Conj. alg. irred.) $\Rightarrow$ tiene la topología Zariski inducida y un cerrado es un conj. alg.

Notar que si $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son abiertos $\neq \emptyset$ en una variedad V (irred)
$\Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. Para todo abierto $\mathcal{U} \neq 0$, $\overline{\mathcal{U}} = V$.



§6.2 Variedades.

Def.- $V \subset \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} \times \mathbb{A}^m$ conj no vacío irred algebraico.

[cuasi-proy.] $\Rightarrow$ Una variedad X es un abierto de V y le asignamos topología inducida.

Def.- X variedad, $k(X) := k(V)$ cuerpo de funciones racionales en X. Si $P \in X$, $\mathcal{O}_P(X) := \mathcal{O}_P(V)$ anillo local de X en P. Si $\mathcal{U} \subset X$ abierto
$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ variedad y se llamará subv. abierta de X.

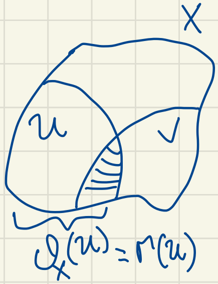
Def.- Y cerrado en $X^{\subset V}$ es irreducible si $Y \neq C_1^{\neq \phi} \cup C_2^{\neq \phi}$, $C_i^{\neq Y}$ cerrados. Luego Y es variedad ya que si $\overline{Y}$ en V $\Rightarrow$ $\overline{Y}$ es irred en V (Chequear). y $Y = \overline{Y} \cap X$, Y es abierto en $\overline{Y}$: subvariedad cerrada de X.

Def.- X = variedad, $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\neq \phi$. Definir:

Esto es el haz de funciónes regulares en X: $\mathcal{O}_X$

$$\Gamma(\mathcal{U}) \left(= \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)\right) := \left\{ \text{funciones racionales en } X \text{ definidas en } \cancel{\text{todo}}\ P \in \mathcal{U} \right\}$$

y así $\Gamma(\mathcal{U}) := \bigcap_{P \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_P(X) \subset k(X)$



Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\Gamma(\mathcal{U}') \supset \Gamma(\mathcal{U})$ (restricción)
Si $\mathcal{U} = X$ = var. afín $\Rightarrow$ $\Gamma(X)$ es el anillo coord.

$$\boxed{\Gamma_h(X = \text{var. proy cerrada}) \neq \Gamma(X) = k}$$

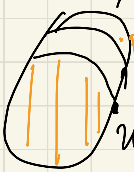
Pensar en $\Gamma(\mathcal{U})$ como funciónes $\mathcal{U} \to k$, ya que:

Prop: $\mathcal{U} \subset X$ = variedad. Suponer $z \in \Gamma(\mathcal{U})$ tal que $z(P) = 0$ $\forall P \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $z = 0$.

Dem: • Tomar X cerrado en $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m$.

- Tomar cortes $\mathcal{U}_{i_1}\times\cdots\times\mathcal{U}_{i_r}\times\mathbb{A}^{m}$ $\quad \mathcal{U}_{i_j}\subset\mathbb{A}^{m_j}$ con $\cap$ con $X\neq\emptyset$.

X



$\cdot p \quad f(p)\neq 0$

- Verlo afín ; $\mathcal{U}\subset X$ afín ($\mathcal{U}$ es más pequeño)

$\mathcal{U}$

- $z=\frac{f}{g}\in k(X)=k(\mathcal{U}) \qquad \mathcal{U}'=\{p\in\mathcal{U} : g(p)\neq 0\}$

$\mathcal{U}'$ afín

z bien definido

$\Rightarrow f(p)=0 \ \forall p\in\mathcal{U}' \Rightarrow f=0$ en X

$\mathcal{U}'$ denso $\Rightarrow$

$z=0$ ■

$f\in\Gamma(\mathcal{U})$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma(F^{-1}(\mathcal{U}))"'] & X \arrow[r, "f"] & k \end{tikzcd}$$

X' topo Zar, F continua, X topo Zar