Trabajo final

y libros/temas del futuro

geometría algebraica
sin polinomios ...

iga 29

6/Julio/21

Final II

- Topología Zariski
- Variedades $\subset \underbrace{\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_s} \times \mathbb{A}^m}_{\text{ambiente más general}}$
- haz de funciones regulares $\mathcal{O}_X$:

Dado X variedad, $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) := \bigcap_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_p(X) \subset k(X)$.
$\mathcal{U} \subset X$ abierto

y se pueden ver como funciones $\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$.

<u>Def.</u>- X, Y variedades. Un <u>morfismo</u> $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una función tal que

(1) φ es continua (2) $\forall\, \mathcal{U} \subset Y$ abierto

si $f \in \mathcal{O}_Y(\mathcal{U}) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$.

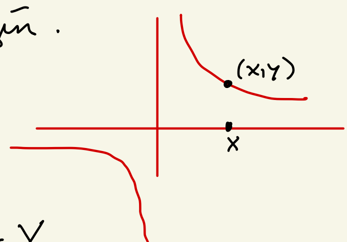
$\therefore$ tenemos categoría de Variedades sobre $k = \bar{k}$.

<u>Def.</u>- Un isomorfismo es un morfismo φ biyectivo con inversa morfismo: $X \xrightarrow[\text{iso}]{\varphi} Y \Rightarrow X \simeq Y$.

<u>Def.</u>- Una variedad isomorfa a una variedad cerrada de $\mathbb{A}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n$) es <u>variedad afín</u> (resp. <u>variedad proyectiva</u>).

<u>Ej 1.</u>- $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = X$ es variedad afín.

$$Y = \{xy = 1\} \subset \mathbb{A}^2$$



$$\psi : Y \longrightarrow \mathbb{A}^1_t \quad \text{pero} \quad \operatorname{Im}(\psi) = X$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

$$\varphi = \psi : Y \twoheadrightarrow X \xrightarrow{\pi} Y \qquad \therefore \quad \begin{matrix} \varphi \circ \pi = 1\!\!1_X \\ \pi \circ \varphi = 1\!\!1_Y \end{matrix} \quad \text{isomor.}$$
$$t \longmapsto (t, \tfrac{1}{t})$$

X es var. afín $\simeq Y$.

¿ Será que las var. afines pueden ser isomorfas a var. proyectivas ?

Cuando tenemos isomorfismo $X \xrightarrow{\varphi} Y \Rightarrow \forall\, \mathcal{U} \subset Y$, tenemos $\mathcal{O}_Y(\mathcal{U}) \underset{\substack{\text{isom.}\\ \text{de } k\text{-álgebras}}}{\xrightarrow{\simeq}} \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$.

$$X_{\text{afín}} \simeq Y_{\text{proy}} \Rightarrow \underset{\substack{\wr\wr \\ k[x_1,\dots,x_n]/I}}{\Gamma(X)} = \mathcal{O}_X(X) \simeq \overset{\substack{k\\ \wr\wr}}{\underbrace{\mathcal{O}_Y(Y)}_{[\text{p.18, Thm 3.4}]}} = \Gamma(Y)$$

$\Rightarrow X$ es un punto.

[Mirar en Fulton §6.3 : Toda variedad $\simeq$ abierto de variedad proyectiva]

<u>Blow-up en un punto</u> :

Considerar la variedad $\{u \cdot y = v \cdot x\} \subset \mathbb{A}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1_{u,v}$

$$X = Bl_{(0,0)}(\mathbb{A}^2) \xrightarrow[\text{Blow-up de }(0,0)]{\sigma} \mathbb{A}^2_{x,y} = Y$$

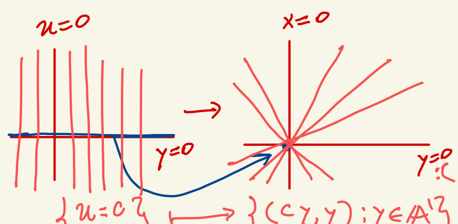
$\sigma : X \longrightarrow Y$ es un morfismo.

Veámoslo por cartas : Tomar $\mathcal{U} = \mathbb{A}^2_{x,y} \times \mathbb{A}^1_u \cong \mathbb{A}^3_{x,y,u}$ $(v \neq 0)$

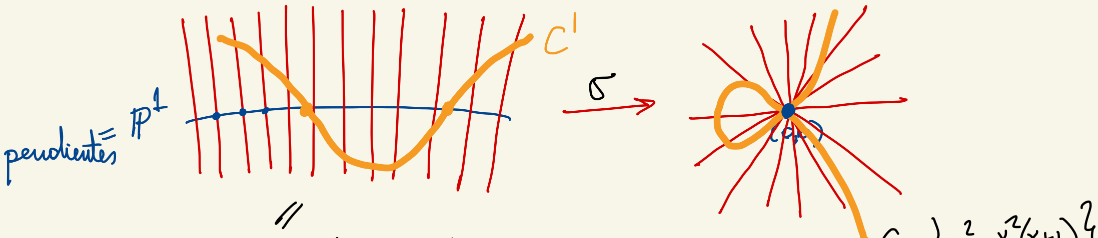
$$\Rightarrow \sigma : X \cap \mathcal{U} \subset \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2$$
$$(x,y,u) \longmapsto (x,y)$$

$X \cap \mathcal{U} = \{x = uy\} \cong \mathbb{A}^2_{u,y}$

$$\mathbb{A}^2_{u,y} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{A}^2_{x,y}$$
$$(u,y) \longmapsto (uy, y)$$



Con V la misma historia : $V = \mathbb{A}^2_{x,y} \times \mathbb{A}^1_v$ $(u \neq 0)$



$$X = Bl_{(0,0)}(\mathbb{A}^2) \supset \sigma^{-1}(C) = ?$$

$\mathcal{U}$

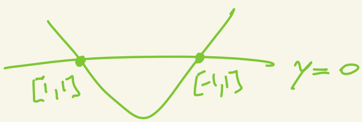
$$\sigma(u,y) = (\underset{x}{uy}, \underset{y}{y})$$

$$y^2 = x^2(x+1)$$

$$y^2 = (uy)^2(uy+1)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - u^2y^2 - u^3y^3 = 0$$

$$y^2 \cdot (1 - u^2 - u^3 y) = 0$$



V

$$\sigma(x,v) = (x, xv)$$

$$y^2 = x^2(x+1)$$

$$x^2v^2 - x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(v^2 - x - 1) = 0$$

$C' = \sigma^{-1}(C) \setminus \mathbb{P}^1$ es la <u>transformada</u> propia.

y $C' \xrightarrow{\sigma|_{C'}} C$ es un morfismo que "resuelve" la singularidad.

σ es genéricamente 1-1, solamente cambia en $\mathbb{P}^1 \mapsto$ punto. Si sacamos este $\mathbb{P}^1$, tenemos

$$\sigma : X \setminus \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

es isomorfismo.

$\therefore$ X es casi un $\mathbb{A}^2$ salvo un conj. cerrado.

$\mathbb{P}^1 \longleftarrow$ pto $\in \mathbb{A}^2$

Cuando eso sucede, diremos que las variedades son biracionales (más débil que isomorfismo), ie,

$$X \underset{\text{bir}}{\simeq} Y \iff \exists\, U \subset X,\ V \subset Y \text{ abiertos tal que } U \underset{\text{isomorfo}}{\simeq} V$$

$$\Updownarrow$$

$$k(X) \simeq k(Y)$$

$\therefore$ $C' \longrightarrow C$ es un morfismo biracional

$\bullet \quad \bullet \longmapsto \bullet$ nodo

quero es 1-1.

Resolución de sing. para curvas C es encontrar $C' \xrightarrow[\text{biracional}]{} C$, C' es suave.

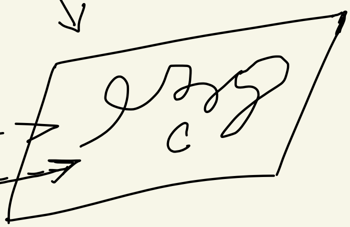
C' = no singular $\Rightarrow g(C') = 0$

R-R : $C' \simeq \mathbb{P}^1$:)

$\exists$ morfismo $\mathbb{P}^1 \supset \mathbb{A}^1 \longrightarrow C'$

resolución sing.

$\mathbb{P}^1 \supset \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\text{morfismo}]{n:1} C \subset \mathbb{P}^2$



C racional? (existirá una parametrización?)