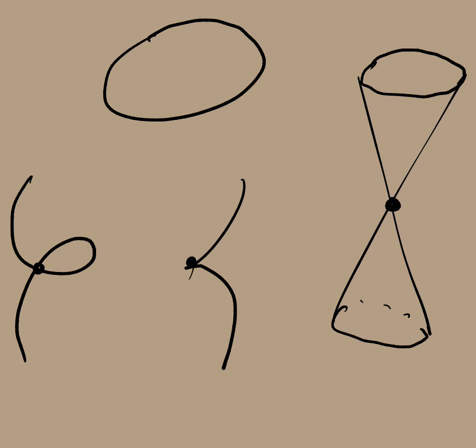


Intr. Geo. Alg.

23/3/21

§1, 2, 3, 4

§1.2 Espacio afín y conjuntos algebraicos.

k = cuerpo. El <u>espacio afín</u> de dimensión n es $\mathbb{A}^n(k) := k^n$.

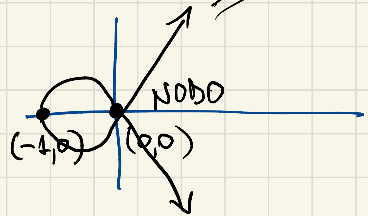
<u>Def.</u>- Dado $F \in k[x_1, \dots, x_n]$, un $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ se llama <u>cero de F</u> si $F(P) = 0$.

<u>Def.</u>- Una <u>hipersuperficie</u> de $\mathbb{A}^n(k)$ es

$$V(F) := \{ P \in \mathbb{A}^n(k) : F(P) = 0 \}$$

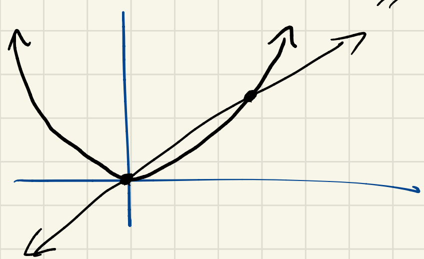
para un $F \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k$.

Ej.- Si $k=\mathbb{R}$, $V(y^2-x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$



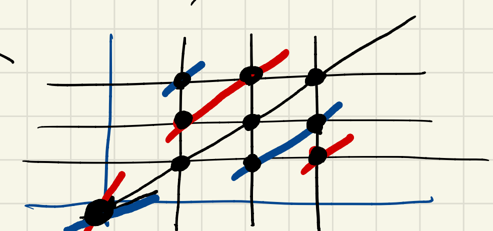
Ej.- $k=\mathbb{R}$, $V(y^2-xy-x^2y+x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$$y(y-x)-x^2(y-x) = (y-x)\cdot(y-x^2)$$

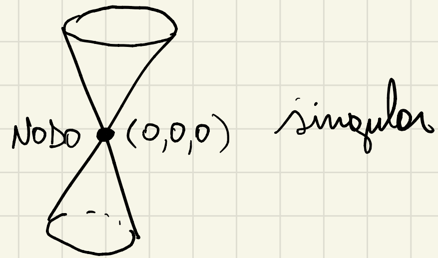


Ej.- $V((x^3-y^3)(x^3-1)(y^3-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$



Ej]:- $V(z^2 - x^2 - y^2) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



Def]:- Sea $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ arbitrario.

$$\therefore \quad V(S) := \{ P \in \mathbb{A}^n(k) : F(P) = 0 \ \forall F \in S \} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

conjunto algebraico afín.

Si $S = \{F_1, \dots, F_m\} \Rightarrow V(S) =: V(F_1, F_2, \dots, F_m)$.

Ej]:- En $\mathbb{A}^1(k)$, $V(x^2) = V(x) = \{0\}$.

¿Quienes son los conj. alg. de $\mathbb{A}^1(k)$?

Resp: $\mathbb{A}^1(k) = V(0)$, $\emptyset = V(1)$, $\{a_1, \dots, a_m\} = V((x-a_1)\cdots(x-a_m))$

y son todos ya que:

Dado F no constante en S, $F(x) = 0$ tiene a lo más grado(F) raíces. $\Rightarrow V(S)$ finito $\blacksquare$

$$V(x, x+1) = \emptyset$$

¡Pronto! todo $V(S) = V(F_1, \dots, F_m)$ [Teorema base Hilbert].

Propiedades:

(1) Sea $I = \langle S \rangle \Rightarrow V(S) = V(I)$.

Dem/: $p \in V(I) \Rightarrow p \in V(S)$, ya que $S \subset I$.

Si $p \in V(S) \Rightarrow$ tomar $F \in I$, queremos $F(P) = 0$.

Pero $F = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_m f_m$ $\quad g_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, $f_i \in S$

$$F(P) = g_1(P) \underbrace{f_1(P)}_{0} + \dots + g_m(P) \underbrace{f_m(P)}_{0}$$
$$= 0 \quad \blacksquare$$

(2) $\{I_\alpha\}$ familia de ideales $\Rightarrow V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$

Luego, intersección arbitraria de conj alg. es algebraico.

(3) $I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$.

(4) $V(F \cdot G) = V(F) \cup V(G)$; $V(I) \cup V(J) = V(\{F \cdot G : F \in I, G \in J\})$

Luego, unión finita de conj. alg. es algebraico.

(5) $V(0) = \mathbb{A}^n(k)$; $V(1) = \emptyset$

Luego los conjuntos algebraicos son los cerrados para una topología en $\mathbb{A}^n(k)$: topología Zariski.

§1.3 Ideal de un conjunto.

Def.: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ conj. arbitrario. Se define el <u>ideal de X</u> como

$$I(X) = \{ F \in k[x_1,\dots,x_n] : F(P) = 0 \ \forall P \in X \}.$$

Algebra — Geometría

$S \xrightarrow{V} V(S)$ conj alg

$I(X) \xleftarrow{I} X$

Prop:

(6) $X \subset Y \implies I(X) \supset I(Y)$.

(7) $I(\emptyset) = k[x_1,\dots,x_n]$; $I(\mathbb{A}^n(k)) = (0) = \{0\}$ si k es infinito.

$I(\underbrace{\{(a_1,\dots,a_n)\}}_{\subset \mathbb{A}^n(k)}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

[Nota: $\overbrace{(x_1 - a_1,\dots,x_n - a_n)}^{=\mathfrak{m}} \subset I(\{(a_1,\dots,a_n)\})$ pero $\mathfrak{m}$ es maximal ya que $k[x_1, \dots, x_n] / (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \cong k$ cuerpo]

(8) $I(V(S)) \supset S$ $\forall$ conj pol. S ; $V(I(X)) \supset X$ $\forall X$ conj ptos

(9) $V(I(V(S))) = V(S)$ $\forall$ conj S ; $I(V(I(X))) = I(X)$ $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$

Si V = conj alg $\Rightarrow V = V(I(V))$

Si $I = I(V) \Rightarrow I = I(V(I))$.

$(x) \subseteq k[x,y]$ es radical no maximal

$\underset{\text{ideal}}{J} \subset I(V(J))$ $\qquad k = \bar{k}$

$J = (x^2) \subset I(V(x^2)) = (x)$

sabremos quien es $I(V(J))$ con respecto a J!

$a^m \in I$ primo $\Downarrow$ $a \in I$ primo son radicales

<u>obs</u>: Si $I = I(X)$ y $F^m \in I \Rightarrow F \in I$.

Def.– Si $I \subset R$ ideal, $\underset{(\text{radical de } I)}{\sqrt{I}} = \text{rad}(I) = \{a \in R : \text{tal que } a^m \in I \ \exists m\}$

(10) $I(X)$ es un ideal radical $\forall X \subset \mathbb{A}^n(k)$.

Alg. Geom.

$k[x_1, \ldots, x_n]$

$\cup$

I ideales $\longrightarrow V(I)$

$\mathfrak{m}$ max $= (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ queremos!

$(x^2+1) \subset \mathbb{R}[x]$, $(x^2+1) = \mathfrak{m}$

$\neq$

$(x - \alpha)$

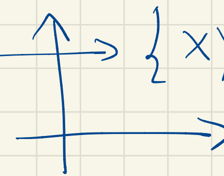
$I(V(I))$

ideales radicales $=$ {conj. alg. afines}

$\uparrow$ Nullstellensatz

si $k = \bar{k}$

$I(V) = (xy) \longleftrightarrow \{xy = 0\} = V(xy)$



$xy \in (xy)$ no es primo

$x \notin$, $y \notin$

Prop. clave: Todo $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es f.g.
y así conj. alg $= V(F_1, \ldots, F_m)$ $\forall F_i$.