$$V(S) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$$

$$\Downarrow$$

$$V(S) = V(F_1, \dots, F_m)$$

Intro Geom Alg

25/3/21

Base de Hilbert

1.1 Prel. alg.

1.2 Conj. algebraicos afines: $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$, k^n

y

1.3 $\underset{\text{alg}}{}$ $\underset{\text{geom}}{V(S)} = \{ P \in \mathbb{A}^n(k) : F(P) = 0 \ \forall F \in S \}$, $\mathbb{A}^n(k) = k^n$

topología Zariski = la top cuyos cerrados son conj. algebraicos

$$I = \langle S \rangle \Rightarrow V(S) = V(I)$$

Al revés, $\underset{\text{geo}}{X \subset \mathbb{A}^n(k)} \Rightarrow \underset{\text{alg}}{I(X)} = \{ F \in k[x_1, \dots, x_n] : F(P) = 0 \ \forall P \in X \}$

vimos propiedades de "las operaciones" $V(\_\_)$, $I(\_\_)$.

§1.4 Teorema de la base de Hilbert.

<u>Teo</u>: Todo conjunto algebraico es la intersección de un número finito de hipersuperficies.

[todo $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$, $V(S) = \bigcap_{i=1}^{m} V(F_i)$, $F_i \in k[x_1, \dots, x_n]$]

dem: Sabemos que $V(S) = V(I)$, $I = \langle S \rangle$.
Luego es suficiente demostrar que todo ideal es finitamente generado.

Def: Un anillo R se dice Noetheriano ssi todo ideal es finitamente generado
[ejemplo: $R = k$ cuerpo ; $R = PID$]

Por demostrar: R Noetheriano $\Rightarrow R[x]$ Noetheriano.

[Esto implica $R[x_1, \dots, x_n]$ Noeth y así para $R = k$].

- Sea $I \subseteq R[x]$ ideal.
- $F = a_0 + a_1 x + \dots + a_d \cdot x^d \in R[x]$, $a_d \neq 0$, $a_d =$ termino lider de $F =: \ell(F)$
- $J =$ Conjunto de todos los lideres de $I \subset R$. $\cup \{0\}$
- J es ideal en R.

$\Big[$ Si $a, b \in J \Rightarrow F_a = \dots + a x^d \quad F_b = \dots + b x^{d'}$

$d = d'$, $\quad F_a + F_b = \quad \dots + (a+b)x^d \qquad a+b = \ell(F_a + F_b)$

$d < d' \quad F_a \cdot x^{d'-d} + F_b \in I \quad \dots, \qquad r \cdot F_a \in I \quad r \in R$

$ra = \ell(rF_a) \quad \therefore ra \in J \Big]$

- Luego por hipótesis $\exists F_1, \dots, F_r \in I$, $J = (\ell(F_1), \dots, \ell(F_r))$.
- Elegir $N > \deg(F_i) \ \forall i$.
- Para cada $m \leq N$, definir

$$J_m = \text{Coef. líderes de } F \in I \text{ tal que } \deg(F) \leq m$$

- Luego $J_m \subset R$ es ideal y $J_m = (\ell(\underset{\nwarrow \text{finitos}}{F_{m,j}}))$, $\deg(F_{m,j}) \leq m$.
- Definir $I' = \langle \underbrace{F_{m,j}, F_i}_{\text{finitos}} \rangle \ \forall m \leq N, j, i$.
- p.d. $I' = I$. Sabemos $I' \subseteq I$. Suponer $I' \subsetneq I$.

- Tomar $G \in I \setminus I'$ de grado menor. ✓

(caso 1): $\deg(G) > N$ $\therefore$ $\exists$ polinomios Q_i tal que G y $\sum_{i=1}^{m} Q_i F_i$ tienen el mismo coeficiente líder.

$$\left[\begin{array}{l} l(G) \in J = (l(F_1), \dots, l(F_m)) \\ \Rightarrow \quad l(G) = \sum_{i=1}^{m} r_i\, l(F_i) \quad r_i \in R. \end{array}\right.$$

$$G \qquad \underbrace{\overbrace{x^{d_1} r_1}^{Q_1} F_1}_{\deg(G)} + \quad \dots \quad + \underbrace{\overbrace{x^{d_m} r_m}^{Q_m} F_m}_{\deg(G)} \quad \Big]$$

$\deg(G) > N > \deg(F_i)$

★: "La idea es bajar el grado a G"

$$\deg\left(G - \sum_{i=1}^{m} Q_i F_i\right) < \deg(G)$$

$\Rightarrow \quad G - \underbrace{\sum Q_i F_i}_{\in I'} \in I'$ (ya que $\deg(G)$ era el menor)

$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad G \in I' \quad \rightarrow\leftarrow.$

(caso 2) : Si $\overset{m+1}{\text{``}}\deg(G) \leq N$, usar la misma idea ✱ pero con los $F_{m,j}$ ... ∎

Cor : $k[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano $\forall k =$ cuerpo.

Vamos ahora a mostrar que un conjunto algebraico cualquiera es unión de conj. alg. irreducibles.
junta

ANALOGÍA

$k[x_1, \dots, x_n]$

$\Downarrow$

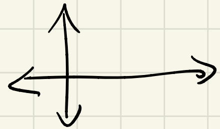
$f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} \Rightarrow V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_m)$

§1.5 Comp. irred. de un conj. algebraico.

Def 1. V conj algebraico es reducible si $V = V_1 \cup V_2$
V_1, V_2 algebraicos y $V_i \neq V$ $i = 1, 2$.

Sino es <u>irreducible</u>.

Ejl.- Un conjunto de m puntos es irreducible $\iff m = 1$.

Ejl.- $V =$  $= V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2 \implies V$ es reducible

ya que $V(xy) = V(x) \cup V(Y)$.

Ejl.- $V((x^2+1)x) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ es irred.

$$V((x^2+1)x) = V(x)$$

Prop.: $\boxed{V \text{ irreducible}}$ = Variedad $\iff I(V)$ es primo.

[$V(x^2) = \{0\} \subseteq \mathbb{A}^1(k)$ $\quad (x^2)$ no es primo $\quad I(V) = (x)$]

Dem: $\Rightarrow)$ $I(V)$ no primo, entonces $\exists\, F_1 F_2 \in I(V)$, $F_i \notin I(V)$.

$\Rightarrow \quad V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$ y $V \cap V(F_i) \neq V$

[Si $V \cap V(F_i) = V$, luego $F_i(P) = 0 \ \forall P \in V$

$\Rightarrow F_i \in I(V) \rightarrow \leftarrow$] $\quad \therefore$ V es reducible.

$\Leftarrow)$ V reducible, $V = V_1 \cup V_2$, $V_i \subsetneq V \quad i = 1, 2$.

$V_i = V(I_i)$ y $I_i \subset I(V_i)$

Dado $P \in V \setminus V_i \Rightarrow \exists F_i \in I_i$, $F(P) \neq 0$

ya que sino, por definición, $P \in V_i = V(I_i)$

$\therefore \quad \exists F_i \in I(V_i)$ tal que $F_i \notin I(V)$

pero $F_1 \cdot F_2 \in I(V) \Rightarrow I(V)$ no es primo.