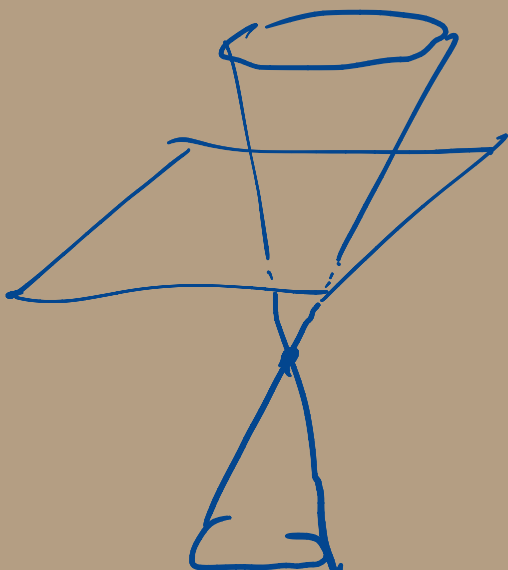


Intro G.A.

30/3/21

comp. irred de un conj algebraico

§1.5

<u>Def</u>.- Un conj. alg. $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es <u>reducible</u> si $V = V_1 \cup V_2$ con V_1, V_2 algebraicos tal que $V_i \subsetneq V$. Sino se dice <u>irreducible</u>.

¡cuidado! Si $f \neq$ const es polinomio $\Rightarrow$ no es cierto que $V(f)$ irred $\Leftrightarrow$ f irred.

Ej.- $V(\underbrace{(x^2+1)(x-1)}_{=f}) \subseteq \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ $\quad f$ no es irred.

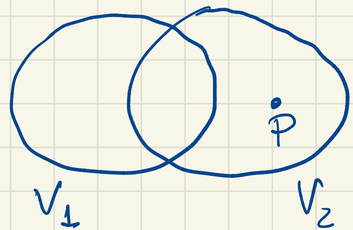
$\qquad = \{1\}$

Por el desafío, $V(\text{irred}) = \{(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

<u>Pero</u> $\boxed{k = \overline{k}}$ entonces sí funciona.

Prop 1: V irred. $\iff$ $I(V)$ primo.

Se usa:



$V_i \subsetneq V \Rightarrow I(V_i) \supsetneq I(V)$.

$V_i = V(I_i)$ $\qquad f \in I_i$ $\qquad f(p) \neq 0$.

[**Def**: Un conj alg. irred se llama <u>variedad</u> $(k = \bar{k})$.]

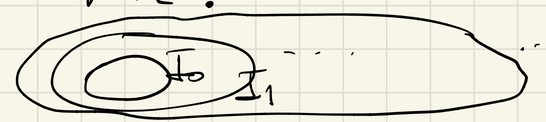
Queremos mostrar que todo conj. algebraico es unión finita de irred..

<u>Idea</u>: $V = \boxed{V_1 \cup V_2} \rightsquigarrow \underline{V_2 = V_3 \cup V_4} \rightsquigarrow$ y la esperanza es que esto se detenga.

<u>Lema</u>: Si $\mathcal{C}$ es una colección no vacía de ideales en un anillo Noetheriano R, entonces $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, es decir, $\exists I \in \mathcal{C}$ el cual <u>no</u> está contenido en otro ideal de $\mathcal{C}$.

<u>Dem</u>: Se usa axioma de elección: Dados $\{S_i\}_{i\in I}$ conjuntos no vacíos, el producto $\prod_{i\in I} S_i$ es no vacío.

- Elegir un ideal de cada subconjunto no vacío de $\mathcal{C}$.
- Sea I_0 el elegido para $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{C}_1 = \{ I \in \mathcal{C} : I \supsetneq I_0 \}$.
- $\mathcal{C}_1 = \emptyset \Rightarrow$ estamos listos. Sino seguimos.
- Sea $I_1 \in \mathcal{C}_1$ el elegido y definir $\mathcal{C}_2 = \{ I \in \mathcal{C} : I \supsetneq I_1 \}$
- Suficiente demostrar que $\mathcal{C}_n = \emptyset \ \forall n$.
- Si no es así, $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$

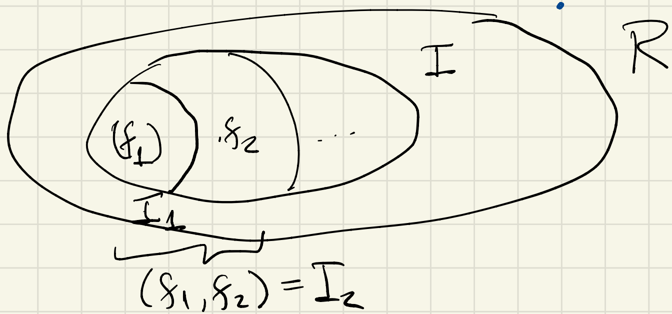


- Luego I es ideal $\xRightarrow{\text{Noetheriano}}$ $I = (f_1, \dots, f_m)$.
- Luego $f_1, \dots, f_m \in I_n \ \forall n \Rightarrow (f_1, \dots, f_m) = I = I_n$

  $\Rightarrow I_n = I_{n+k} \ \forall k \geq 0 \quad \rightarrow\leftarrow$
- Luego debe parar ∎

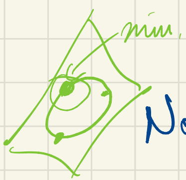
Noetheriano ideales f.g. $\Longleftrightarrow$ Lema $\Longleftrightarrow$ Toda cadena ascendente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ es tal que $\exists n$, $I_n = I_{n+k}$ $k \geq 0$.

?



$\therefore$ $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Prop: Cualquier colección de conj. algebraicos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \text{Indices}}$ en $\mathbb{A}^n(k)$ tiene un elemento minimal.

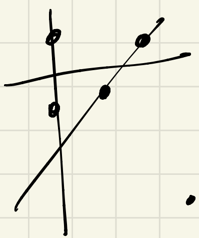


Notar que $\{V_\alpha\}$ conj. alg $\Longrightarrow$ $\underbrace{\{I(V_\alpha)\}}_{\mathcal{C} =}$ son ideales distintos

$\therefore$ $\mathcal{C}$ tiene elemento maximal $I(V_0)$ $\Longrightarrow$ V_0 es minimal ya que $V_\alpha \subsetneq V_0 \Longrightarrow I(V_\alpha) \supsetneq I(V_0)$.

Teo: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ conj alg. Entonces hay conj alg. únicos $V_1, \dots, V_m$ irreducibles tal que $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$
$V_i \not\subset V_j \quad \forall i \neq j$.

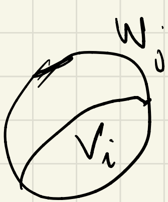
Dem: $\mathcal{C} = \{$ conj alg $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$: V <u>no</u> es la unión finita de irred $\}$



Si $\mathcal{C} \neq \emptyset \Rightarrow$ Sea V minimal en $\mathcal{C}$. Como $V \in \mathcal{C}$
$\Rightarrow$ no es irred. Luego $V = V_1 \cup V_2 \quad V_i \subsetneq V$ y
digamos $V_1 \in \mathcal{C}$ $\rightarrow\leftarrow$ por minimalidad.

- Luego $V = \underbrace{V_1 \cup \dots V_m}_{\text{irred}}$ y borrar $V_i \subset V_j$.

Asumir $V = W_1 \cup \dots \cup W_r$ otra tal descom W_i irred $W_i \not\subset W_j$.



$\therefore \quad V_i = \bigcup_{j=1}^{r} (W_j \cap V_i) \underset{V_i \text{ irred}}{\Rightarrow} \exists j \quad W_j \cap V_i = V_i \quad \forall j = j(i)$

$\Rightarrow V_i \subseteq W_{j(i)}$, análogo, $W_{j(i)} \subseteq V_k \quad \forall k$

$$\Rightarrow \quad V_i \subseteq V_k \quad \Rightarrow \quad i = k \quad \text{y} \quad V_i = W_{j(i)}.$$

<u>Lo que viene</u>: (§1.6 ¿Quienes son los conj. algebraicos de $\mathbb{A}^2(k)$?)

<u>Resumen</u>.

Se definió $\mathbb{A}^n(k)$ espacio afín (k^n) y conj alg.

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \{ P \in \mathbb{A}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in S \} \\
&\ \| \\
V(\langle S \rangle) &
\end{aligned}
$$

y apareció el álgebra (los ideales en $k[x_1, \dots, x_n]$)

$\|$ base de Hilbert.

$$V(\underbrace{f_1, \dots, f_m}_{I}) = \underbrace{V_1 \cup \dots \cup V_m}_{\text{irreducibles}} \qquad V_i \not\subseteq V_j$$

y se definió $I(X) = \{ f \in k[x_1,\dots,x_n] : f(p) = 0 \ \forall p \in X \}$

$\rightsquigarrow \ I \subsetneq I(X)$.

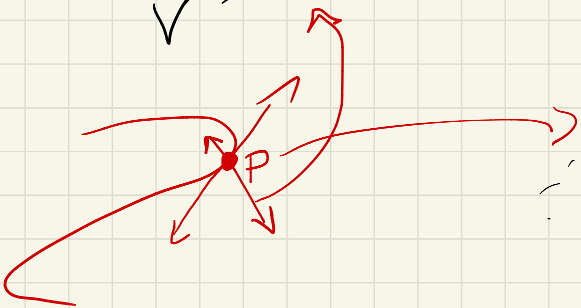
Tomar: $V = \{(0,0)\} \in \mathbb{A}^2(k)$

$$\boxed{I(V) = (x,y)}$$

de interés, el ideal que queremos para V.

$\cup \qquad \cup$

$(x^2,y) \ \cup \ (x,y^2)$



hay que considerar Todo! (Esquemas)

En Geometría algebraica

Spec(R) geom. — R anillo

Spec($\mathbb{Z}$) — $\mathbb{Z}$

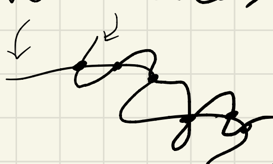
$\Downarrow$

(p) puntos, var. irred

$(p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n})$

con. alg.

Variedades $\longleftrightarrow$ intersección entre Variedades



$\leftarrow$ Teo intersección

$\mathbb{P}^2(k)$

$\rightsquigarrow$ Teo. de Bezout.

$f = A(x-a)^2 + B(y-b)^2) = 0$

$A \neq 0$, $B \neq 0$

∞ f, g donde res. y tomamos

$\boxed{f^2 + t^2 g^2} = 0$

t