Intro Geo Alg

6-Abril-2021

Conj. algebraicos de $\mathbb{A}^2$

$$V \subseteq \mathbb{A}^n_k \text{ variedad (conj. irred)} \longleftrightarrow \underbrace{k[x_1,\dots,x_n]/\underbrace{I(V)}_{\text{primo}}}_{\text{Dominio integral}} = \Gamma(V)$$

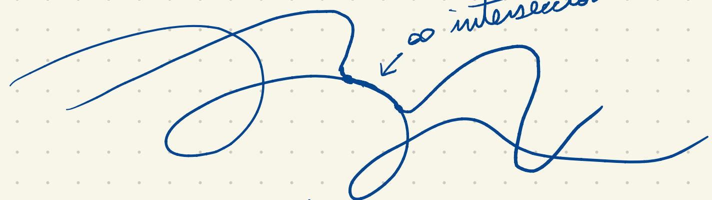
$$V \underset{\text{geom.}}{\simeq} W \longleftrightarrow \Gamma(V) \underset{\text{alg.}}{\simeq} \Gamma(W)$$

ϕ $\qquad \mathbb{A}^2_k$

$\cdot$ $\qquad \varphi$

§1.6 Conjuntos algebraicos del plano afín.

[Clasificaremos conj. alg. irreducibles]



Eso no puede pasar en geo Alg

Prop: $f, g \in k[X,Y]$ sin factores comunes. Entonces, $V(f,g)$ es un conjunto finito.

[inicio de la Teoría de Intersección]

Dem:

- Lema de Gauss f,g sin divisores comunes en $\overbrace{k[X]}^{\mathbb{Z}}[Y] \Rightarrow$ tampoco en $\overbrace{k(X)}^{\mathbb{Q}}[Y]$.

  [R UFD y f,g sin div com en $R[Y] \Rightarrow$ tampoco en $K[Y]$, $K = \mathrm{Frac}(R)$]

- Pero el $k(X)[Y]$ es dominio Euclidiano.

- Existen $R, S \in k(x)[y]$ tal que $Rf + Sg = 1$.
- Limpiando denominadores (que son pol en x):

$$R'f + S'g = p(x) \in k[x], \quad R', S' \in k[x,y]$$

- Luego hay finitos coord. x para los puntos en $V(f,g)$.
- Luego hacer lo mismo con coord. y " " " " .
- Así $V(f,g)$ es finito ∎

<u>Cor 1</u>: Si $f \in k[x,y]$ irreducible con $|V(f)| = \infty$
$\Rightarrow I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible.

<u>Dem</u>:
- Si $g \in I(V(f)) \Rightarrow |V(f,g)| = \infty$
- Por la prop. anterior $\Rightarrow f \mid g \Rightarrow g \in (f)$.
  $\Rightarrow I(V(f)) = (f)$.
- Como (f) es primo $\Rightarrow V(f)$ es irreducible ∎

Cor 2: Asumir k infinito. Entonces los irreducibles de $\mathbb{A}^2(k)$ son:

$$\emptyset \ , \quad \bullet \ , \quad V(f) \text{ con } f \text{ irred y } |V(f)| = \infty \ , \quad \mathbb{A}^2(k).$$

Dem/ Sea V irred $\iff I(V)$ primo.

- Si $|V|$ finito o $I(V) = (0) \Rightarrow V =$ pto o $\emptyset$ o $\mathbb{A}^2(k)$.
- Suponer que $|V| = \infty$, tal que $(0) \subsetneq I(V) \subsetneq k[X,Y]$. Entonces existe $f \in I(V)$ no constante.
- Como $I(V)$ es primo, podemos asumir que f es irreducible.
- Si $g \in I(V)$ y $g \notin (f) \Rightarrow V \subset V(f,g)$ es finito $\rightarrow\leftarrow$ $\Rightarrow I(V) = (f)$. ✓
- Pero $V(I(V)) = V(f)$ y muy general $V(I(V)) = V$

[$\hookrightarrow$ si X conj $\Rightarrow X \subseteq V(I(X))$ pero si $X = V(J)$, $J \subset I(X)$ $\Rightarrow X = V(J) \supseteq V(I(X))$]

Cor 3: Asumir $k=\overline{k}$, $f\in k[x,y]$ no const, $f=f_1^{n_1}\cdots f_r^{n_r}$, f_i irred

Hilbert: Si $k=\overline{k} \Rightarrow$ $I(V(J))=\sqrt{J}$

$\Rightarrow$ $V(f)=V(f_1)\cup\cdots\cup V(f_r)$ es la descom en irreducibles y $I(V(f))=(f_1f_2\cdots f_r)$.

Dem: Como f_i, f_j son coprimos $\Rightarrow$ no hay inclusiones entre los $V(f_i)$, $V(f_j)$.

[Si $V(f_i)\subset V(f_j) \Rightarrow \underset{(f_i)}{\underset{\|}{I(V(f_i))}}\supset \underset{(f_j)}{\underset{\|}{I(V(f_j))}}$ ya que $|V(f_i)|=\infty$]

• Tenemos $\underset{I(V(f))}{\underset{\|}{I(\bigcup_i V(f_i))}}=\bigcap_i I(V(f_i))=\bigcap_i (f_i)\supseteq(f_1f_2\cdots f_r)$

Pero si $g\in I(V(f)) \Rightarrow f_i\mid g\ \forall i \Rightarrow g\in(f_1f_2\cdots f_r)$

$\therefore\ I(V(f))=(f_1f_2\cdots f_r)$ ∎

§1.7 Nullstellensatz de Hilbert (o teorema de los ceros de Hilbert)

Asumir $k = \overline{k}$.

(Teo ceros débil): Si $\underset{(f_1,\dots,f_m)}{\overset{\parallel}{I}} \subsetneq k[x_1,\dots,x_n] \Rightarrow V(I) \neq \emptyset$.

[e.g. $k = \mathbb{R}$, $I = (x^2+1) \subsetneq k[x]$ pero $V(x^2+1) = \emptyset$]

[Si $(f_1,\dots,f_m) \ni 1 \Rightarrow g_1 f_1 + \dots + g_m f_m = 1$
Si $p \in V(f_1,\dots,f_m) \Rightarrow 0 = 1 \rightarrow\leftarrow$]

<u>Dem</u>: Podemos asumir que I es ideal maximal.

[ya que todo $I \subset \mathfrak{m} \Rightarrow V(I) \supset \underbrace{V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset}_{\text{ganamos}}$]

Luego $L = k[x_1,\dots,x_n]/I$ es cuerpo y $k \subseteq L$.

$\boxed{\text{Asumir que } k = L}$!!! $\Rightarrow$ $k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow k[x_1,\dots,x_n]/I = L = k$

$x_i \longmapsto a_i \in k$

$x_i - a_i \longmapsto 0$

$\Rightarrow \underbrace{(x_1-a_1, \dots, x_n-a_n)}_{\text{es maximal}} \subseteq I$

$\Rightarrow I = (x_1-a_1, \dots, x_n-a_n) \therefore V(I) \ni (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \phi$ ∎

Leer: "the unreal life of Oscar Zariski"

Lema Zariski: Sean $K \subset L$ cuerpos tales que L es f.g. como K-algebra (ie como anillo)
$\Rightarrow L$ es f.g. como K-Módulo.
($\Rightarrow K \subset L$ es una extensión finita) (y si $K = \overline{K}$ no hay tal extensión $\Rightarrow K = L$).

Proxima veremos como hacer esto sin Lema de Zariski para $k = \mathbb{C}$ [M. Artin "Algebra", sección geo alg

∃ la cita a S. Lefschetz "To me algebraic geometry is algebra with a kick".

Pensar como generalizar eso: $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$???

["Desafío": Como obtener Teo. de ceros de Hilbert para $k[x,y]$ ($k=\overline{k}$) a mano.]

$I \subsetneq k[x]$, $\underline{k=\overline{k}}$ $\quad \exists p,\ f(p)=0$ ✓.

"(f)" f no const.

$$V \subseteq \mathbb{A}^n_k \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m_k$$

fuerte

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (P_1(x_1,\dots,x_n),\dots,P_m(x_1,\dots,x_n))$$

Álgebra

entre anillos $\Gamma(V) \leftarrow \Gamma(W)$

isom. $\iff \simeq$

débil

$$V \dashrightarrow W$$

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \left(\frac{P_1}{q_1},\dots,\frac{P_m}{q_m}\right)$$

biracional $\iff \simeq$

entre cuerpos $K(\Gamma(V)) \leftarrow K(\Gamma(W))$