$k = \bar{k}$

$I \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$

$\Downarrow$

$V(I) \neq \emptyset$

Intro GA

8/4/2021

Nullstellensatz de Hilbert

Ya vimos

Teo débil de ceros de Hilbert : Si $k=\bar{k}$, $I \subsetneq k[x_1,\dots,x_n] \Rightarrow V(I) \neq \phi$.

La demostración necesitó el Lema de Zariski:

<u>Lema</u>: $K \subset L$ cuerpos tal que L es K-álg g.g.
$\Rightarrow L$ g.g. como K-espacio vectorial.

<u>Hoy</u>: demostración completa para $k = \mathbb{C}$.

<u>Dem</u>: Digamos que I es maximal.

- Considerar $\pi : \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I = L$ cuerpo.
- Sea $\pi_1 = \pi|_{\mathbb{C}[x_1]} \longrightarrow L$ (siempre notar que $\pi_i(a) = a \ \forall a \in \mathbb{C}$).

Lema: $\ker \pi_1 = (0)$ o un ideal maximal.

Dem: • $\ker \pi_1 = (0)$ o $(0) \subsetneq \ker(\pi_1) \subsetneq \mathbb{C}[x_1]$.

• $\exists f \neq 0$ en $\ker(\pi_1)$ y no constante.

• Asumir $f \underset{k=\bar{k}}{=} (x_1 - a_1) g$ como $\pi(f) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - a_1) \in \ker \pi_1$ o $g \in \ker \pi_1$

• Podemos asumir que $x_1 - a \in \ker \pi_1$ $\forall a \in \mathbb{C}$.

$\therefore \underbrace{(x_1 - a)}_{\text{max}} \subseteq \ker \pi_1 \subsetneq \mathbb{C}[x_1]$

$\Rightarrow (x_1 - a) = \ker \pi_1$ ∎

no usó $\mathbb{C}$ usó $k = \bar{k}$

Suponer que $\ker \pi_i$ son todos ideales maximales,

ie, $\ker \pi_i = (x_i - a_i)$ $\forall a_i \in k = \mathbb{C}$.

$\therefore (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subseteq \ker \pi \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$

$\Rightarrow \ker \pi = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = I$ ✓ (misma dem antes).

★ Asumir entonces que $\ker(\pi_1) = (0) \Rightarrow k[X_1] \subset L$

Como L es cuerpo $\Rightarrow$ $\boxed{k(X_1) \subset L}$

Notar que:

- Los monomios $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ forman una base numerable de $k[X_1, \dots, X_n]$ como k-esp. vectorial.
- Como $L = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I$ está generado como $\mathbb{C}$-esp. vect. por un conj numerable de elementos $\Rightarrow$ tiene una base numerable.

<u>Lema</u> V = esp. vectorial gen por $\{v_1, v_2, \dots\}$

$\Rightarrow$ Todo conj. $\mathcal{L}$ de vectores l.i. es finito o numerable.

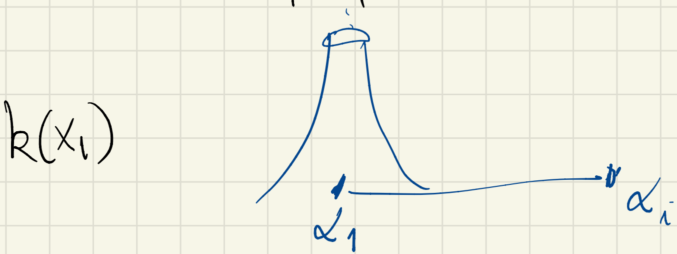
<u>Dem</u>: $V_n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \simeq k^n$, $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cap V_n$ entonces $\mathcal{L}_n$ es un conj l.i. y $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n \Rightarrow \mathcal{L}$ es finito o num ∎

Lema: $\left\{ \frac{1}{X_1-\alpha} \text{ con } \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ es l.i.

[Con eso se termina la contradicción, y así $\ker \pi_i \neq (0)$ [ya que $\mathbb{C}$ es no numerable]]

Dem:

$$\frac{c_1}{X_1-\alpha_1} + \dots + \frac{c_n}{X_1-\alpha_n} = 0 \quad \text{con } c_i \in k.$$



al verlo como función $\Rightarrow c_i = 0 \ \forall i$ (ya que sino exploto y no es posible compensar).

Multiplicar por $\prod_{i=1}^{n}(X_1-\alpha_i) \Rightarrow c_1 f_1(X_1) + \dots + c_n f_n(X_1) = 0$

evaluar en $X_1-\alpha_1$

$c_1 \cdot \underbrace{f_1(\alpha_1)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_i = 0 \ \forall i \Leftarrow$

<u>Desafío</u>: ¿Qué hacer con el caso $k = \bar{k}$ numerable?

Teorema Nullstellensatz de Hilbert: Si $k = \bar{k}$, I ideal en $k[x_1, \dots, x_n]$

$$\Rightarrow I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

<u>Dem</u>: $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$ $\left[f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^n \in I \quad f^n(p) = 0 \ \forall p \in V(I) \right.$
$\left. f(p) = 0 \ \forall p \in V(I) \Rightarrow f \in I(V(I)) \right]$

Que queremos: Si $F = 0$ en $V(I) \Rightarrow \exists n$ tal que $F^n \in I$.

[no es cierto $k = \mathbb{R}$: $f = 2x^2 + y^2$ $\quad V(x^2+y^2) = \{(0,0)\}$, $\quad x^2+y^2 \not| (2x^2+y^2)^n$
$I = (x^2+y^2)$ $\qquad \forall n$]

Para mostrar $I(V(I)) \subset \sqrt{I}$ usaremos el truco de Robinowitsch

(Físico-Mat ruso, popular 1930 Math. Ann.)

- $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$.
- Sea $f \in I(V(I))$ y digamos que $I=(f_1,\dots,f_r)$ (base Hilbert).
- Sea $J=(f_1,\dots,f_r, x_{n+1}\cdot f-1)$
- Estamos pensando en $\mathbb{A}^{n+1}_k$: $V(J)=\,?$
- Por el Teorema débil de Hilbert, tenemos $J=k[x_1,\dots,x_{n+1}]$ ya que $V(J)$ es vacío.

[Si $\underset{(p_1,\dots,p_{n+1})}{p} \in V(J) \Rightarrow f_1(p)=f_2(p)=\dots=f_r(p)=0$

y $\underbrace{p_{n+1}\cdot f(p)-1=0}$

Pero $p\in V(I)$ y así $f(p)=0 \;\therefore\; 0-1=0 \rightarrow\leftarrow$]

- Luego $1 \in (f_1, f_2, \dots, f_r, x_{n+1}f-1)$

★ • Luego $1 = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_r f_r + g_{r+1}(x_{n+1} f - 1)$.

• Tomar $x_{n+1} = \frac{1}{f}$.

$\Rightarrow 1 = g_1(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f}) \cdot f_1 + g_2(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f}) \cdot f_2 + \cdots + g_r(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f}) \cdot f_r$

Notar que los $g_i \in k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$

Elegir la mayor potencia denominador del f y mult (limpiar den. con f^M)

$$\Rightarrow \quad f^M = \underbrace{G_1(x_1, \ldots, x_n) f_1 + \cdots + G_r(x_1, \ldots, x_n) f_r}_{\text{polin :)}}$$

$$\Rightarrow \quad f^M \in I = (f_1, \ldots, f_r) \quad \blacksquare$$

Varias correspondencias cuando $k=\overline{k}$

Cor 1: $$\left\{\begin{array}{c} I \subseteq k[x_1,\dots,x_n] \\ \text{ideal radical}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{array}{c} V \subseteq \mathbb{A}^n_k \\ \text{conj alg.}\end{array}\right\}$$

$$I(V) \longleftarrow\!\shortmid\; V$$
$$I \longmapsto V(I)$$

Cor 2: $$\left\{\begin{array}{c} I \subseteq k[x_1,\dots,x_n] \\ \text{ideal primo}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{array}{c} V \subseteq \mathbb{A}^n_k \\ \text{conj alg irred}\end{array}\right\}$$

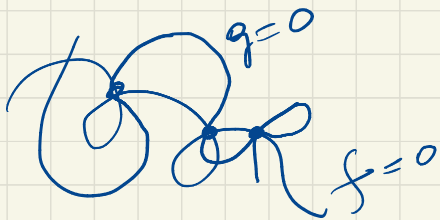
Cor 2': $$\left\{\begin{array}{c} I \subseteq k[x_1,\dots,x_n] \\ \max\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \text{puntos en } \mathbb{A}^n_k \right\}$$

Cor 3: $$\left\{\begin{array}{c} f \in k[x_1,\dots,x_n] \\ \text{irred}\end{array}\right\}\Big/ k^* \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{array}{c} \text{hipersuperficies} \\ \text{irred. en } \mathbb{A}^n_k\end{array}\right\}$$

Cor 4.: I ideal de $k[x_1,\dots,x_n]$ $(k=\overline{k})$. Entonces,

$V(I)$ conj. finito de puntos $\iff$ $k[x_1,\dots,x_n]/I$ es un k-esp. vectorial de dimensión finita.

Si eso ocurre, entonces $\#(V(I)) \leq \dim_k\left(k[x_1,\dots,x_n]/I\right)$.

[

$f,g \in k[x,y]$ coprimos

$I=(f,g)$

$\underbrace{\#(V(I))}_{\text{lo que queremos!}} \leq \dim_k\left(k[x,y]/(f,g)\right)$]

Dem 1^-

- Sean $P_1, \dots, P_r \in V(I) \subseteq \mathbb{A}^n_k$. Elegir $F_1, \dots, F_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $F_i(P_j) = 0$ $i \neq j$ $F_i(P_i) = 1$. $\left[I(V) \underset{P \notin V}{\neq} I(V \cup \{P\}) \right]$

- Sea $\overline{F_i}$ la imagen en $k[x_1, \dots, x_n]/I$.
- Si $\lambda_1 \overline{F_1} + \dots + \lambda_r \overline{F_r} = 0$ con $\lambda_i \in k$

$$\Rightarrow \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_r F_r \in I \Rightarrow \lambda_j = \sum \lambda_i F_i(P_j) = 0$$

$\therefore$ $\{\overline{F_1}, \dots, \overline{F_r}\}$ son l.i. en $k[x_1, \dots, x_n]/I$

$$\Rightarrow r \leq \dim_k k[x_1, \dots, x_n]/I .$$

$\therefore$ Si $\dim_k k[x_1, \dots, x_n]/I$ finito $\Rightarrow$ $V(I)$ es finito.

- Suponer $V(I) = \{P_1, \dots, P_r\}$, $P_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$
- definir $F_j := \prod_{i=1}^{r} (X_j - a_{ij})$, $j = 1, \dots, n$.
- Luego $F_j \in I(V(I)) \underset{k=\bar{k} \text{ Null.}}{\Longrightarrow} F_j^N \in I \quad \forall N > 0$,

- Luego $\overline{F_j}^N = 0$ en $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

$\Rightarrow$ $\overline{X_j}^{rN}$ es comb. lineal de $\overline{1}, \overline{X_j}, \dots, \overline{X_j}^{rN-1}$.

$\Rightarrow$ $\{\overline{X_1}^{m_1}, \dots, \overline{X_n}^{m_n} \ ; \ m_i < rN\}$ genera $k[X_1, \dots, X_n]/I$

y así dim finita ∎