Generación finita

Intro Geo Alg
13/Abril/2021
Hacia el Lema
de Zariski I

§1.8 Módulos ; condiciones de finitud.

<u>Def</u>: R = anillo conm. $1 \neq 0$. Un <u>R-módulo</u> M es un grupo abeliano $(M,+)$ con una multiplicación por escalar $R \times M \longrightarrow M$ $(r,m) \mapsto rm$ tal que

(1) $(a+b)\cdot m = am + bm$. $\forall m \in M$, $\forall a,b \in R$
(2) $a\cdot(m+n) = am + an$. $\forall n \in M$
(3) $(ab)\cdot m = a\cdot(bm)$.
(4) $1\cdot m = m$.

Ejl.- $0_R \cdot m = 0_M$ $\forall m \in M$.

Ejl.- (1) $\mathbb{Z}$-módulo es simplemente un grupo abeliano.
(2) Si R = cuerpo, entonces R-módulo es R-esp. vectorial.
(3) Todo ideal I es un R-módulo.
(4) Si $\varphi: R \to S$ hom. de anillos ($\varphi(1_R) = 1_S$)
$\Rightarrow$ todo S-módulo es un R-módulo.

Def.- (1) $N \leq M$ (subgrupo con $+$) R-módulo es submódulo si $\forall r \in R$, $\forall n \in N$ tenemos $rn \in N$.

(2) $\underset{\text{conj}}{S} \subseteq M$ R-módulo $\Rightarrow$ $\langle S \rangle = \{ \sum_{\text{finita}} r_i s_i \ ; \ r_i \in R, s_i \in S \}$

(3) M R-módulo $\underbrace{\text{f.g.}}_{\text{finitamente generado}}$ si existe S finito tal que $M = \langle S \rangle$.

Def.- $R \subset S$ anillos.

(A) S es <u>finito sobre R</u> si S es f.g. como R-módulo.

\+ Si R cuerpo y S f.g. como R-módulo, entonces $\dim_R S = [S:R]$.

(B) S es <u>f.g. como R-álgebra</u> si $\exists\, \varphi : R[x_1,\dots,x_n] \underbrace{\twoheadrightarrow}_{\text{sobreyectivo}} S$

\+ • homomorfismo de anillos con $\varphi|_R = \mathbb{1}_R$.

(C) Si $R \subseteq S$ son cuerpos y $v_1,\dots,v_n \in S$, sea

\+ • inv $R(v_1,\dots,v_n)$ el cuerpo cociente de $R[v_1,\dots,v_n]$: $R \subseteq R(v_1,\dots,v_n) \subseteq S$.

S es f.g. extensión de R si $S = R(v_1,\dots,v_n)$ $\exists v_1,\dots,v_n$.

Ejl.- $k \subseteq k(x_1,\dots,x_n) = S$. Luego S es extensión f.g. sobre k (C)✓ pero no como k-alg o como k-mod.

[$k \subseteq k(x)$ ¿es $k(x)$ una k-alg. f.g.? Resp. es <u>NO</u>.

En efecto, $f_1,\dots,f_n \in k(x) \Rightarrow$ todo $r = \sum \alpha_i f_1^{\beta_1}\cdots f_n^{\beta_n}$, $\alpha_i \in k$

Pero eso tendrá problemas con: Sean $\underbrace{g_1\cdots g_n}_{g}$ la mult. de los denominadores de f_i.

$f_i = \dfrac{h_i}{g_i}$

∴ dado $r \in k(x)$, $\exists N$ tal que $g^N \cdot r \in k[x]$.

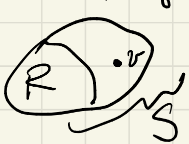
Luego tomar $\frac{1}{p'} = r$ tal que $p' \nmid g$.]

§1.9 Elementos integrales.

Def.- $R \subset S$ anillos. Un elemento $v \in S$ es <u>integral</u> sobre R si

$$v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + \dots + a_{n-1} v + a_n = 0$$

$\forall a_i \in R$.



($R \subset S$ cuerpos $\Rightarrow$ v se dice algebraico)

Prop.- $R \subset S$ dominios, $v \in S$. Son equivalentes:

(1) v es integral sobre R.
(2) $R[v]$ es un R-módulo f. g. sobre R.
(3) $\exists$ un subanillo $R' \subset S$, $R[v] \subset R'$, R' es R-módulo f. g. sobre R $\Big[\underbrace{R \subseteq R[v] \subseteq R'}_{\text{f. g. } |_R} \subseteq S\Big]$.

dem: (1) $\Rightarrow$ (2) obvio.

Si v es int $\Rightarrow$ $v^n = -\sum_{i=1}^{n} a_i v^{n-i}$. Luego cada vez que veamos v^n reempl. por potencias menores de v.

$\therefore$ $R[v] = \langle 1, v, \dots, v^{n-1} \rangle$ sobre R como R-mod.

(2) $\Rightarrow$ (3) trivial con $R' = R[v]$.

(3) $\Rightarrow$ (1) asumir (3) $\Rightarrow$ $\underbrace{R \subseteq R[v] \subseteq R'}_{R\text{-mod f.g.}} \subseteq S$

Sean $w_1, \dots, w_n$ generadores de R' como R-módulo.

→ Misión: encontrar $v^m + a_{m-1} v^{m-1} + \dots + a_0 = 0$, con $a_i \in R$.

Sabemos que $v \cdot w_i = a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \dots + a_{in} w_n$, donde $a_{ij} \in R$.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} (a_{11} - v) w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1n} w_n &= 0 \\ a_{21} w_1 + (a_{22} - v) w_2 + \dots + a_{2n} w_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} w_1 + \dots + a_{n\,n-1} w_{n-1} + (a_{nn} - v) w_n &= 0 \end{aligned}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} - v & a_{12} & \dots & \\ a_{21} & a_{22} - v & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{nn} - v \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pensar esta igualdad en cuerpo fracciones de S.

$$\Rightarrow \quad \ker M \neq \vec{0} \iff \underbrace{\det \begin{bmatrix} a_{11} - v & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} - v \end{bmatrix}}_{v^n + A_{n-1} v^{n-1} + \dots + A_0} = 0$$

Cor $R \subset S$ dominios $\Rightarrow$ {elementos integrales sobre R} es subanillo de S.

Dem Si a, b integrales $\Rightarrow$ $R[a,b] \supseteq R$ es f.g. como R-módulo.

Ya que $\underbrace{\underbrace{R \subseteq \overset{v_1 \dots v_n}{R[a]}}_{f.g.} \subseteq \overset{w_1 \dots w_r}{R[a,b]}}_{f.g. \ \langle v_i w_j \rangle}$ } de la definición.

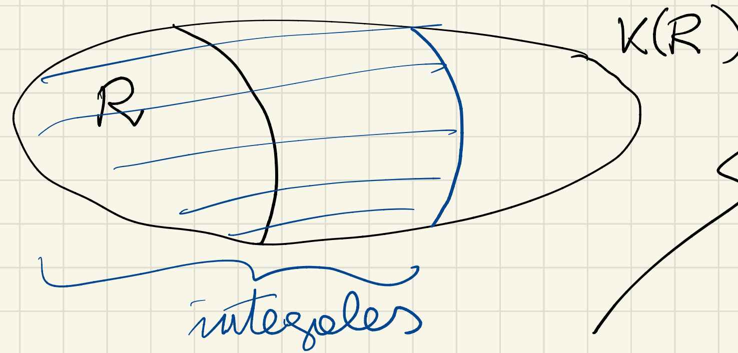
$R \subseteq R[a,b] = R'$ f.g. como R-mod.

z es integral por (3) prop. anterior.

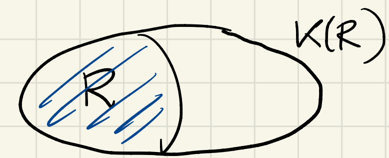
$z = a \pm b$, $z = a \cdot b$ $\Rightarrow$ luego son integrales sobre R ∎

Def $R \subset S$ dominios. S es integral sobre R si todo elemento de S es integral sobre R. (Cuerpos usar algebraicos.)

Un R es <u>integralmente cerrado</u> si {todo z en} $K(R) \setminus R$ {no} es integral.



integr. cerrado



Ej.: $\underset{R}{\mathbb{Z}} \subseteq \overset{=K(R)}{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado.

Lo mismo para $R = \text{UFD} \subset K(R)$.

$$A\left(\frac{p}{q}\right)^3 + B\left(\frac{p}{q}\right)^2 + C\left(\frac{p}{q}\right) + D = 0$$

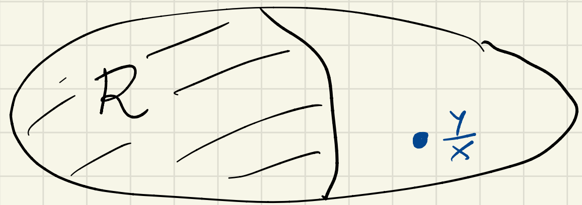
$$A(p)^3 + B\,p^2 q + C\,p q^2 + D\,q^3 = 0$$

$\Rightarrow$ $q \mid A$ y $p \mid D$ $\therefore$ lista de posibles.

en nuestro caso $A = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$.

Ej 1.- $V = \{ y^2 = x^3 \} \subseteq \mathbb{A}^2_k$ $\qquad R = k[x,y]/(y^2 - x^3)$ dominio

¿Será R integralmente cerrado?



$K(R)$

Notar que $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0$, $\frac{y}{x} \in K(R)$

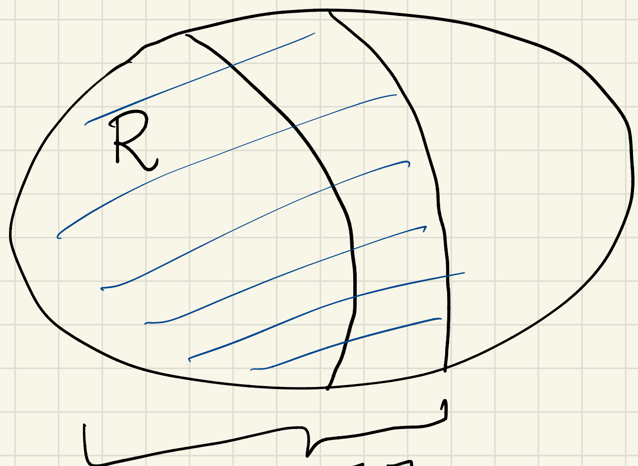
pero $\frac{y}{x} \notin R$ [Tarea: demostrarlo]

R no es integralmente cerrado.

$k[x,y] \xrightarrow{\varphi} k[t]$, $\begin{array}{l} x \mapsto t^2 \\ y \mapsto t^3 \end{array}$

$\therefore \quad \ker \varphi = (y^2 - x^3) \implies R \simeq k[t^2, t^3] \subset k[t].$

Notar que $K(R) \simeq k(t)$.



$k(t) = K(R)$

$k[t]$ = conj. de elementos integrales.

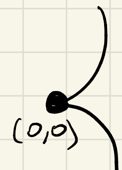
$\{y^2 - x^3\} =$  $\longleftrightarrow \mathbb{A}^1_k$

$R = k[x,y]/(y^2-x^3) \qquad k[t]$

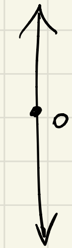
$$R = k[x,y]/(y^2-x^3) \hookrightarrow k[t] = \text{Clousura integral}$$

$$\cong k[t^2,t^3]$$

$$x \longmapsto t^2$$
$$y \longmapsto t^3$$

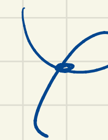


$\xleftarrow{\text{Geom.}} \mathbb{A}^1_k$



En dim 1, clousura integral resuelve sing.

[siempre!]



$$R = k[x,y]/(y^2-x^2(x-1))$$

$y^p - x^q$ p,q primos