SGA Im 3

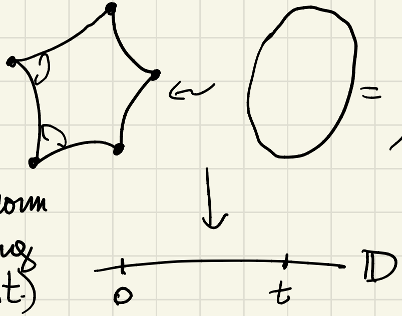
19/10/2020

# Intro.

$\mathbb{D} = \{ t \in \mathbb{C} \ : \ |t| < \varepsilon \}$ germen de curva suave.

Miraremos degeneraciones de superficies sobre $\mathbb{D}$.

(*) $X_0 = X =$

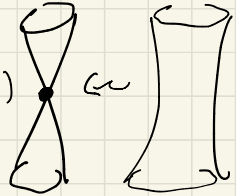


$= X_t$ suave

$\|$ sup. proy. norm con sólo sing cociente (l.t.)

(en particular, sing. $\frac{1}{m}(1,q)$)

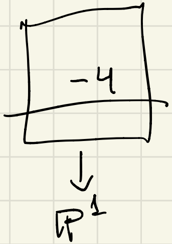
Ej: $\{x^2+y^2+z^2+tw^2=0\} \subseteq \mathbb{P}^3 \times \mathbb{A}^1_t$



obs: Degen. a sing ADE se pueden resolver simultaneamente

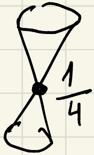
En general es complicado explicitar ecuaciones para las degeneraciones. Muchos ejemplos provienen de mostrar que $H^2(X, T_X) = 0$ con lo que tenemos no local-to-global obstructions.

Ej.: $\mathbb{F}_4 =$



$\longrightarrow \overline{\mathbb{F}_4} = X =$

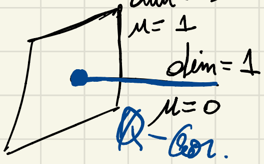
$\overline{\mathbb{F}_4} = \mathbb{P}(1,1,4)$



$K_X^2=9$ $\exists$ $\xleftarrow{\mu=0}$ $\mathbb{P}^2$ $K^2=9$

$\exists$ $\xleftarrow{\mu=1}$ $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ $K^2=8$

$\mathrm{Def}\left(\frac{1}{4}(1,1)\right) =$
wahl



$H^2(X,T_X)=0$

29 Teoremas guías.

**Teo**: Si $X$ es tal que $-K_X$ es big $\Rightarrow H^2(X,T_X)=0$.

(e.g. $\mathbb{P}(A,B,C)$)) [Hacking - Prokhorov 2010] Prop. 3.1

**Teo**: ("Reducción semiestable explícita") Dado (*), entonces existe (quizás despues de un cambio de base) un modelo birracional de (*) sobre $\mathbb{D}$

$$\begin{tikzcd} X' \subset \mathcal{X}' \arrow[r, "\substack{\text{mory}\\ \text{bir}}", "F"'] \arrow[dr] & \mathcal{X} \supset X \arrow[d] \\ & \mathbb{D} \ni 0 \end{tikzcd}$$

con $K_{\mathcal{X}'}$ F-neg donde la nueva degeneración tiene sólo sing. de Wahl y es $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

Si $h^0(mK_X) > 0$ $\forall m$ $\Rightarrow$ podemos correr MMP relativo a $\mathbb{D}$ explícito

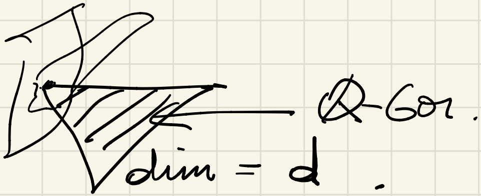
$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}_0 \dashrightarrow \mathcal{X}_1 \dashrightarrow \mathcal{X}_2 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow \mathcal{X}_s$$ con $K_{X_s}$ neg.

[Hacking Tevelev U 2013 "flipping surfaces"].

obs.- $\mathrm{Def}\left(\frac{1}{m}(1,q)\right)$ tiene varios componentes en general. (Tantas como P-resoluciones, [Kollár ShB 1988, inv.])

Una deformación $\mathbb{Q}$-Gorenstein es la que preserva el $K^2$ ($K^2_{X_t}$ es constante). Si $\frac{1}{m}(1,q)$ tiene tal def $\Rightarrow$ $m = dn^2$, $q = dna-1$, $\mathrm{mcd}(n,a)=1$, o tipo A. T-sing.

$$\mathrm{Def}\left(\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)\right) =$$



Una sing. Wahl es una T-sing con $d=1$.
($\Leftrightarrow$ $\mu = 0$) ...

## 39 Moderno v/s clásico.

**Def.-** Una W-superficie es un $X$ con sólo sing Wahl junto con una suavización $(X \subset \mathcal{X}) \longrightarrow (0 \in \mathbb{D})$ $\mathbb{Q}$-Goren.

| W-superficie (moderno) | Superficie (clásico) |
|---|---|
| Teoría de intersección$/_{\mathbb{D}}$ | Teoría de intersección |

invariantes son constantes
(eg. $\pi_1$ no lo es necesariamente)

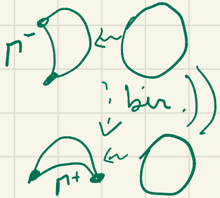
---

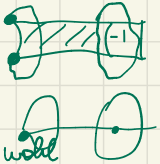
## $K_{\mathcal{X}}$ - MMP

Si $K_{X_0}$ neg $\Rightarrow$ $K_{X_t}$ es neg $\forall t| << \varepsilon$

Si $K_{X_0}$ no es neg

|  | Flip | Contr. div. |
|---|---|---|
| $X_0$ | « serie de blow-dows y luego blow-ups » | blow-down a una sing. de Wahl. |
| $X_t$ | NADA | blow-down de una (-1)-curva |





hacer flip o contr div en único
El "anti" flip o contr. div es gen ∞

---

invariantes $K^2$, $\chi_{top}$, $\chi$, $p_g$, $q$

---

## K - MMP

blow-down de (-1)-curvas a puntos no singulares
($\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 \cdot \mathbb{P}^1 = -1$ ; Teo. de Castelnuovo)

blow-down $\Longleftrightarrow$ blow-up

| MMP resultado | | MMP resultado | |
|---|---|---|---|
| <u>BMHP</u> ← $\mathbb{P}^2$ degeneración con fibra normal de $\mathbb{P}^2$ (<u>Teo</u> es una W-super.)<br>a descu anetti<br>ó<br>Deformación suave de $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ | Módelo único con K neg | $\mathbb{P}^2$ ó $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$<br>$\mathcal{E}$: v.b. rank 2<br>$C$: curva<br>(reglados)<br>(bir a $C \times \mathbb{P}^1$) | módelo único con K neg. |

<u>Teo</u>: (Badescu Crelle '86 - Manetti Crelle '91 $\underset{\text{generalizan}}{\text{———}}$ HP 2010 Compositio)

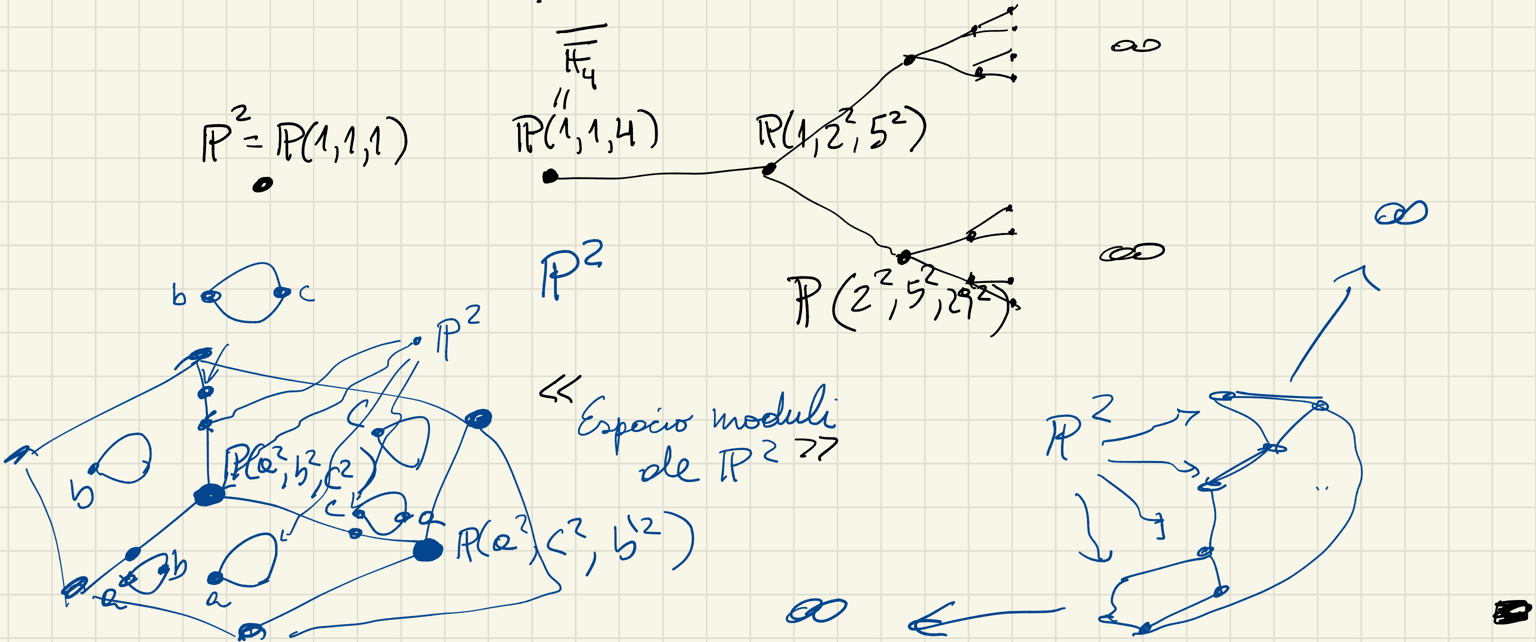
$\mathbb{P}^2$ se degenera a $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$ con $a^2+b^2+c^2 = 3abc$ (Ecuación de Markov) como W-superficie o a una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein parcial de esos planos proyectivos.

$$\left( \frac{1}{a^2}(b^2, c^2) \ldots \quad \frac{1}{N^2}(1, NA-1) \right)$$

En general, $\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2 = \lambda abc$

entonces toda solución entera se obtiene a partir de una solución mínima (ie $(a,b,c)$ con $a+b+c$ mínimo) a través de mutaciones $(a,b,c)\mapsto(a,b,\frac{\lambda}{\gamma}ab-c)$.

Con $\alpha=\beta=\gamma=1$, $\lambda=3 \Rightarrow$ mínimo $(1,1,1)$.



W-sup. con $K$ no neg.
$\Rightarrow$ puedo correr MMP.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\mathbb{F}_1 = Bl_p(\mathbb{P}^2) \rightsquigarrow Bl_p(\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2))} \arrow[d] \arrow[rddd, bend left, "\text{Correr MMP}"] & \\
 & \mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \mathbb{P}(a^2, b^2, c^2) \arrow[d] & \\
\text{elegir ANTI-FLIPS} \arrow[uur, bend left, "\infty"] \arrow[uur, bend right, "\infty"'] \arrow[ur, "\infty"] & t \quad \mathbb{D} \quad 0 & \\
 & & \\
 & & \mathbb{F}_1 \rightsquigarrow \mathbb{F}_7 \\
 & & t \quad\quad 0
\end{tikzcd}$$