

TEORÍA DE DEFORMACIÓN EXPLÍCITA

NICOLÁS VILCHES

RESUMEN. ¿Cómo se ve localmente un espacio de moduli? En teoría, la respuesta se obtiene al estudiar la teoría de deformación del objeto en cuestión. En la práctica, describir dichas deformaciones en ejemplos concretos es una ardua tarea. Nuestro objetivo en estas dos charlas es presentar técnicas para hacer estos cálculos de manera explícita.

En la primera charla discutiremos las ideas clásicas en teoría de deformación: funtores de anillos artinianos, teorías de tangente-obstrucción y varios ejemplos relevantes. En la segunda charla introduciremos álgebras de Lie diferenciales graduadas como una herramienta para calcular explícitamente deformaciones. Mostraremos cómo construir representantes explícitos en situaciones de interés y cómo recuperar funtores de deformación a partir de dichos representantes.

ÍNDICE

Parte 1. Preliminares	1
1. Introducción	1
2. Funtores de anillos artinianos	2
3. Teorías de tangente y obstrucción	3
4. Teorema de Schlessinger	5
Parte 2. DGLA	6
Parte 3. Comentarios adicionales	6
Referencias	6

Parte 1. Preliminares

1. INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo para hoy es estudiar teoría de deformaciones. Para motivar el asunto, digamos que queremos deformar una curva C . ¿Qué es una deformación de C ? Nuestra intuición geométrica da algunas luces.

1. Quizá uno debería mirar “familias de curvas $\mathcal{C} \rightarrow S$ sobre una base S con un punto central $s_0 \in S$, junto con $\mathcal{C}_{s_0} \cong C$ ”.
2. Probablemente uno deba mirar deformaciones “pequeñas”: mirar clases de equivalencia de $\mathcal{C} \rightarrow S$ al encoger S .

En nuestra intuición geométrica estamos pensando probablemente en una base S como \mathbb{A}^1 o similar, y con $s_0 = 0$.

La observación clave que uno hace es que la información de deformación de C está contenida en la información infinitesimal alrededor del origen. En general, uno intenta estudiar deformaciones sobre una base S que sea un “punto gordo”—un esquema artinianiano con un único punto. Antes de continuar, haremos un repaso de dichos anillos.

- Definición 1.**
1. Una \mathbb{C} -álgebra A es *artiniana* si $\dim_{\mathbb{C}} A < \infty$. Es *local* si tiene un único ideal maximal.
 2. Denotamos por Art la categoría de \mathbb{C} -álgebras artiniananas locales sobre \mathbb{C} . Dado $A \in \text{Art}$, denotamos por \mathfrak{m}_A su único ideal maximal.
 3. Un *engrosamiento*¹ de $A \in \text{Art}$ es un morfismo sobreyectivo $B \rightarrow A$, con $B \in \text{Art}$. Es *pequeña* si $K = \ker(B \rightarrow A)$ satisface² $\mathfrak{m}_B K = 0$.

Del lado geométrico, uno piensa Art como la categoría (opuesta) de “puntos gordos”. Históricamente se prefiere escribir todo en términos de anillos.

Ejemplo 2. Los ejemplos básicos a tener en mente son $A = \mathbb{C}[t]/(t^n)$, o más generalmente $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_r]/(t_1, \dots, t_r)^n$. Dos ejemplos de engrosamientos son:

$$0 \rightarrow \frac{(t^{n-1})}{(t^n)} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[t]}{(t^n)} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[t]}{(t^{n-1})} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \frac{(xy)}{(x^2, y^2)} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x^2, y^2)} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x, y)^2} \rightarrow 0.$$

Notemos que Art tiene coproductos fibrados: si $C \rightarrow A, C \rightarrow B$ son dos morfismos en Art , entonces $A \otimes_C B$ está en Art . Un poco más inesperado es que Art admite *productos* fibrados. Dados $f: A \rightarrow C, g: B \rightarrow C$, es un buen ejercicio chequear que

$$A \times_C B := \{(a, b) : f(a) = g(b)\}$$

es un producto fibrado en Art . (En particular, que es una \mathbb{C} -álgebra artinianana local.)

2. FUNCTORES DE ANILLOS ARTINIANOS

Definición 3. Un functor de anillos artiniananos es un functor covariante $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$.

Antes de imponer condiciones más fuertes en F , veamos ejemplos que nos pueden interesar.

Ejemplo 4. Sea $Z \subset \mathbb{P}^N$ una variedad. Definimos un functor $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$ via

$$F(A) = \{\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}^2 \times \text{Spec } A : \mathcal{Z}|_0 = Z, \mathcal{Z} \rightarrow \text{Spec } A \text{ plano}\}.$$

El milagro³ acá es imponer ser plano. Informalmente, uno quiere evitar deformaciones que saltan: la “cruz” $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ no debería ser una deformación de \mathbb{A}^1 . Llamamos al functor F el *functor de Hilbert local* $\text{Hilb}_{Z, \mathbb{P}^N}$.

Ejemplo 5. Sea X una variedad y sea E un fibrado vectorial. Definimos

$$F(A) = \{\mathcal{E} \subset X \times \text{Spec } A, \phi: \mathcal{E}|_0 \rightarrow E : \mathcal{E} \text{ plano sobre } \text{Spec } A, \phi \text{ isomorfismo}\}.$$

¹O en inglés *thickening*

²Ojo que Hartshorne usa “pequeña” para la condición más restrictiva $K = \mathbb{C}$. En este caso diremos que $B \rightarrow A$ es *principal*.

³*The concept of flatness is a riddle that comes out of algebra, but which technically is the answer to many prayers*—D. Mumford.

Ejemplo 6. Sea X una variedad. Denotamos por $\text{Def}_X: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$ el functor de deformaciones de X . Sus objetos son variedades $\mathcal{X} \subset X \times \text{Spec } A$, planas sobre A , junto con un isomorfismo $\mathcal{X}_0 \cong X$.

Ejemplo 7. Mencionaremos un ejemplo teórico pero muy importante. Sea $R = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]/(f_1, \dots, f_s)$. Denotamos por $h_R: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$ el functor $h_R(A) = \text{Hom}(R, A)$. Aún cuando R no es un álgebra Artiniana, es un límite de álgebras artinianas. Un functor $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$ de la forma h_R para un álgebra R como arriba se llama *pro-representable*.

Informalmente, lo que uno debería pensar es como sigue. Digamos que M es un espacio de moduli parametrizando algún tipo de objetos “rígidos” (sin automorfismos), como (i) subesquemas de un esquema dado, (ii) cocientes de un haz fijo. Digamos que $p \in M$ representa alguno de esos objetos E . En tal caso, el functor Def_E es pro-representable por $\hat{\mathcal{O}}_{M,p}$. Esto incluye el caso del esquema de Hilbert local.

Ahora bien, en la mayoría de los casos nuestros objetos pueden potencialmente tener automorfismos, como (i) deformar variedades abstractas, o (ii) deformar fibrados vectoriales. En tal caso, trabajar con espacios de moduli se hace un poco más delicado, y uno salta a trabajar al nivel de *stacks*. En este caso, el “anillo local” del stack guarda memoria de esos automorfismos, y resulta que el functor de deformaciones Def_E no se ve como h_A . Lo mejor que uno puede lograr es lo siguiente.

Definición 8. Sea $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$ un functor. Decimos que F tiene una *familia miniversal* (o *cáscara*⁴.) si existe un álgebra $R = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]/(f_1, \dots, f_s)$ y un morfismo $\eta: h_R \rightarrow F$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

- $h_R(A) \rightarrow F(A)$ es sobreyectivo para todo $A \in \text{Art}$,
- Si $B \rightarrow A$ es una extensión pequeña, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_R(B) & \longrightarrow & h_R(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(B) & \longrightarrow & F(A) \end{array}$$

induce una *sobreyección* $h_R(B) \rightarrow F(B) \times_{F(A)} h_R(A)$.

- El morfismo $h_R(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2) \rightarrow F(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2)$ es sobreyectivo.

Un célebre teorema de Schlessinger da criterios explícitos para verificar la existencia de familias miniversales. En vez de discutir el teorema en toda su generalidad, veremos un enfoque especial usando teorías de tangente y obstrucción.

3. TEORÍAS DE TANGENTE Y OBSTRUCCIÓN

Desde ahora, impondremos la siguiente condición.

(H0) Para todo $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$, $F(\mathbb{C}) = \{*\}$.

Definición 9 (cf. [Har10, Ex. 16.4]). Sea $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$. Una *teoría de tangente* para F consiste en las siguientes piezas de información:

- Un espacio vectorial T_1 .

⁴En inglés *hull*

- Para toda extensión pequeña $0 \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$, una acción de $K \otimes T_1$ en $F(B)$.

Imponemos las siguientes condiciones.

- Para toda extensión pequeña, la acción de $K \otimes T_1$ es transitiva en cada fibra $p^{-1}(\alpha)$ del morfismo $F(B) \rightarrow F(A)$.
- Si $B = \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2$ y $A = \mathbb{C}$, entonces la acción es biyectiva.
- Las acciones son naturales con respecto a morfismos de extensiones pequeñas.

No ahondaremos mucho en las teorías de tangente, puesto que su importancia quedará escondida en el futuro. Por ahora, mencionamos que si F admite una teoría de tangente, entonces $F(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2) \cong T_1$. En particular, el espacio T_1 está “determinado” por F , de existir.

Definición 10 (cf. [Har10, Ex. 15.5]). Sea $F: \text{Art} \rightarrow \text{Set}$. Una *teoría de obstrucción* para F consiste en las siguientes piezas de información:

- Un espacio vectorial T_2 .
- Para toda $0 \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$ pequeña, un morfismo $ob: F(A) \rightarrow T_2 \otimes K$.

Imponemos lo siguiente:

- Dada una extensión pequeña, un elemento $\alpha \in F(A)$ tiene una preimagen en $F(B)$ si y solo si $ob(\alpha) = 0$.
- Naturalidad.

Hagamos un ejemplo concreto de una teoría de tangente y obstrucción, siguiendo la discusión en [Har10, p. 53]. Fijamos una variedad X y un fibrado vectorial E en X .

Proposición 11. *El functor Def_E admite una teoría de tangente y obstrucción con $T_1 = \text{Ext}^1(E, E)$ y $T_2 = \text{Ext}^2(E, E)$.*

Demostración. (Idea) Comencemos trivializando el fibrado vectorial E . Esto es, fijamos una colección de abiertos $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, e isomorfismos $e_i: \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r} \rightarrow E|_{U_i}$. En tal caso, llamamos $e_{ij} = e_j^{-1}e_i \in \Gamma(U_{ij}, \text{GL}_r)$ a las matrices de transición.

Consideremos una extensión pequeña $0 \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$, y digamos que $\mathcal{F} \in \text{Def}_E(A)$ es una deformación de E . No es difícil verificar que \mathcal{F} es trivial en cada abierto $U_i \times \text{Spec } A$. Con ello, obtenemos $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij} \times \text{Spec } A, \text{GL}_r)$. De hecho, la condición que $\mathcal{F}|_0 \cong E$ nos ayuda a imponer $f_{ij}|_0 = e_{ij}$.

Intentemos levantar \mathcal{F} a $X \times \text{Spec } A$. Uno intenta hacer esto de manera bien ingenua: tomamos las matrices $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij} \times \text{Spec } A, \text{GL}_r)$ y las levantamos a $g_{ij} \in \Gamma(U_{ij} \times \text{Spec } B, \text{GL}_r)$. Este elemento *no* está bien definido, pero el error depende de $\Gamma(U_{ij}, \text{GL}_r) \otimes K$.

Consideremos

$$\psi_{ijk} = e_{ik}^{-1}g_{jk}g_{ij} - e_{ik}^{-1}g_{ik} \in \Gamma(U_{ijk} \times \text{Spec } B, \text{Mat}_{r \times r}).$$

Afirmamos que los ψ_{ijk} definen un 2-cociclo con coeficientes en $\mathcal{H}om(E, E) \otimes K$. En efecto,

$$\begin{aligned} & e_{ij}^{-1}\psi_{jkl}e_{ij} - \psi_{ikl} + \psi_{ijl} - \psi_{ijk} \\ &= e_{il}^{-1} \{ (g_{kl}g_{jk} - g_{jl})e_{ij} + g_{jl}g_{ij} + g_{kl}g_{ik} - e_{kl}(g_{jk}g_{ij} - g_{ik}) \} \\ &= e_{il}^{-1} \{ (g_{kl}g_{jk} - g_{jl})g_{ij} + g_{jl}g_{ij} + g_{kl}g_{ik} - g_{kl}(g_{jk}g_{ij} - g_{ik}) \} \end{aligned}$$

El último paso usa que $g_{jk}g_{ij} - g_{ik}$ tiene coeficientes en K y $e_{ij} - g_{jk}$ tiene coeficientes en \mathfrak{m}_B , por lo que el producto es cero. Este es el paso donde usamos que la extensión es pequeña. Con ello, ψ_{ijk} define un elemento en $H^2(X, \mathcal{H}om(E, E)) \otimes K = \text{Ext}^2(E, E) \otimes K$. Uno verifica de la misma manera que la imagen $[\psi_{ijk}] \in \text{Ext}^2(E, E) \otimes K$ es independiente de la elección de g_{ij} .

Ahora bien, si existe un levantamiento de los g_{ij} que da un fibrado vectorial, entonces claramente $\psi_{ijk} = 0$ para todo i, j, k , y así la clase $[\psi_{ijk}]$ es cero. En cambio, si $[\psi_{ijk}] = 0$, uno puede modificar la elección de los g_{ij} para que se satisfaga la condición de fibrado vectorial. \square

4. TEOREMA DE SCHLESSINGER

Para finalizar, discutiremos una versión modificada del teorema de Schlessinger garantizando existencia de familias miniversales. En principio, puede parecer más general que la versión a la que uno está acostumbrado. Veremos la próxima sesión que en la práctica esto no es una diferencia.

Teorema 12 (Schlessinger). *Sea F un functor de anillos artinianos con T_1, T_2 una teoría de tangente y obstrucción. Supongamos adicionalmente que $\dim T_1 < \infty$. Luego, F admite una familia miniversal.*

La demostración nos ocupará el resto de la sección. En primer lugar, recordemos que $T_1 \cong F(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2)$. Con ello, tomemos una base v_1, \dots, v_r de T_1 , y sea x_1, \dots, x_r la base dual en T_1^\vee .

Llamemos $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$, y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_S$ a su ideal maximal. Vamos a construir de manera inductiva ideales $J_k, k \geq 1$ y elementos $\xi_k \in F(S/J_k)$ satisfaciendo las siguientes tres propiedades.

1. $J_1 = \mathfrak{m}^2$.
2. $\mathfrak{m}J_k \subset J_{k+1} \subset J_k$,
3. J_{k+1} es el mayor ideal satisfaciendo el punto anterior para el que ξ_k admite un levantamiento; ξ_{k+1} es una preimagen de ξ_k .

Omitiremos el caso base $k = 1$; es una consecuencia formal de la existencia del elemento tangente. Para el paso inductivo, supongamos que ya hemos construido J_{k+1} . Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_k/\mathfrak{m}J_k & \longrightarrow & S/\mathfrak{m}J_k & \longrightarrow & S/J_k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J_k/J_{k+1} & \longrightarrow & S/J_{k+1} & \longrightarrow & S/J_k \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ambas extensiones son pequeñas, por lo que podemos aplicar el morfismo de obstrucción:

$$\begin{array}{ccccc} F(S/\mathfrak{m}J_k) & \longrightarrow & F(S/J_k) & \longrightarrow & T_2 \otimes \frac{J_k}{\mathfrak{m}J_k} \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ F(S/J_{k+1}) & \longrightarrow & F(S/J_k) & \longrightarrow & T_2 \otimes \frac{J_k}{J_{k+1}} \end{array}$$

Resulta así que la imagen de $ob(\xi_k)$ en $T_2 \otimes \frac{J_k}{J_{k+1}}$ es cero.

La discusión anterior nos da una pista de cómo construir J_{k+1} . Tomamos $ob(\xi_k) \in T_2 \otimes \frac{J_k}{\mathfrak{m}J_k}$, y buscamos el cociente más grande de $\frac{J_k}{\mathfrak{m}J_k}$ donde esta imagen se vuelve

cero. Esto nos genera un (\mathbb{C} -subespacio) $\mathfrak{m}J_k \subset J_{k+1} \subset J_k$. Uno rápidamente verifica que J_{k+1} es un ideal, y por construcción ξ_k admite un levantamiento. Escogemos ξ_{k+1} como dicho levantamiento.

Finalmente, uno toma límite de los S/\mathfrak{m}_k para obtener un anillo $R = \varprojlim S/\mathfrak{m}_k$. No es difícil (pero es tedioso!) verificar que R cumple lo pedido.

Observación 13. El mayor problema de este enfoque es que las obstrucciones dependen de la elección de $\xi_k \in F(S/J_k)$ a cada paso. En particular, la construcción no es canónica. (Una manera de pensarlo es considerar algo como $\mathbb{C}[[x, y]]/(x)$ contra $\mathbb{C}[[x, y]]/(x + x^2 + x^3 + \dots)$: ambos anillos son isomorfos, pero uno debe hacer “ajustes” a cada paso.)

Pensemos un poco lo que ocurriría para fibrados vectoriales. Si seguimos nuestro proceso, a cada paso obtenemos un $\xi_k \in F(S/J_k)$, junto con una clase de obstrucción $ob(\xi_k) \in \text{Ext}^2(E, E) \otimes (J_k/\mathfrak{m}J_k)$. Ahora bien, uno podría (ingenuamente) intentar hacer los levantamientos a $F(\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]])$. Esto *no* es un álgebra artiniiana, pero al menos a nivel de hacer cálculos todo funciona igual. Y si uno es capaz de hacer un levantamiento $\eta_k \in F(\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]/J_k)$ de ξ_k , entonces uno puede levantar ξ_k a *todos* los siguientes órdenes sin obstrucciones.

De hecho, esto es más fácil de hacer de lo que parece. La próxima semana discutiremos cómo uno puede escribir teorías de tangente y obstrucción suficientemente explícitas para lograr este objetivo.

Parte 2. DGLA

Parte 3. Comentarios adicionales

REFERENCIAS

- [Har10] Robin Hartshorne, *Deformation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 257, Springer, New York, 2010. MR2583634

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLUMBIA UNIVERSITY, 2990 BROADWAY, NEW YORK, NY 10027, USA

Email address: `nivilches@math.columbia.edu`