Morrison - Kawamata para superficies

Sea X una superficie proyectiva $/\mathbb{C}$.

Defn: Sean D_1, D_2 divisores de Cartier en X. Decimos que D_1 es numéricamente equivalente a D_2 si

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$$

para toda curva irreducible $C \subset X$. En este caso, escribimos $D_1 \equiv D_2$.

Definimos $N^1(X) = \mathrm{Div}(X)/\equiv$ y lo llamamos el grupo de Nerón-Severi. $N^1(X)$ es un grupo abeliano libre y finitamente generado. $N^1(X) \cong \mathbb{Z}^{\rho(X)}$, y llamamos $\rho(X)$ el rango de Picard.

Además, en el caso de superficies, el Teorema del índice de Hodge nos dice que este látice tiene signatura $(1, \rho(X)-1)$ con respecto a la forma bilineal dada por la intersección.

Al extender escalares, obtenemos un espacio vectorial $N^1(X)_{\mathbb{R}} = N^1(X) \otimes \mathbb{R}$ de dimensión finita.

Dentro de $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ podemos identificar ciertos conos de divisores:

- El cono amplio $\mathrm{Amp}(X)$ es el cono convexo de todas las clases de divisores amplios.

- La clausura de $\mathrm{Amp}(X)$ es el cono nef. $\overline{\mathrm{Amp}(X)} = \mathrm{Nef}(X)$. Corresponde al cono convexo de divisores que intersectan no negativamente todas la curvas irreducibles de X.

- En superficies podemos definir el cono positivo $\mathcal{C}$ como la componente conexa de $\{x \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \mid x^2 > 0\}$ que contiene al cono amplio.

En el caso K3, como $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, tenemos $\mathrm{Pic}(X) \cong N^1(X)$.

Sea $O(N^1(X))$ el grupo ortogonal (con respecto al producto intersección).

Idea de la demostración:

Teorema de Torelli [Piatetsk-Shapiro y Shafarevich]

Un isomorfismo ϕ de estructuras de Hodge entre K3's es realizado por un isomorfismo de las K3, si ϕ manda el cono nef en el cono nef.

Entonces, salvo índice finito, todo elemento de $O(N^1(X))_{\mathbb{Z}}$ que preserva el cono nef es realizado por un automorfismo de X.

El cono nef está definido por los hiperplanos de la forma

$$H_b = \{x \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \mid x \cdot b = 0, \ b^2 = -2\}.$$

y cada hiperplano induce una reflexión

$$s_b : x \longmapsto x + (x \cdot b) b.$$

$W = \{s_b\}_{b \in B}$. Este grupo es normal en $O(N^1(X))_{\mathbb{Z}}$. Es más, salvo grupos finitos,

$$O(N^1(X))_{\mathbb{Z}} \doteq \mathrm{Aut}(X) \ltimes W.$$

Fact: $O(N^1(X))_{\mathbb{Z}}$ actúa en el cono positivo $\mathcal{C}$ con un dominio fundamental racional poliedral D.

Pero W actúa en el cono positivo con dominio fundamental $\mathrm{Nef}(X)$.

Entonces podemos mover D para que esté dentro de $\mathrm{Nef}(X)$, y en entonces $\mathrm{Aut}(X)$ actúa con dominio fundamental D en $\mathrm{Nef}(X)$.