SGA 2026-1 : "Conj. de Morrison - Kawamata para variedades abelianas"

Recuerdo: X var. proy suave $/\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $K_X \equiv 0$. Se conjetura que:

(I) $\exists\, \Pi \subseteq \mathrm{Nef}^e(X) = \mathrm{Nef}(X) \cap \mathrm{Eff}(X)$ Dominio Fund. Racional Poliedral (DFRP) para $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright \mathrm{Nef}^e(X)$, i.e., $\mathrm{Nef}^e(X) = \bigcup_{g \in \mathrm{Aut}(X)} g^* \Pi$ con $\mathrm{int}\,\Pi \cap \mathrm{int}\, g^*\Pi = \emptyset$ a menos que $g^* = \mathrm{Id}$.

(II) $\exists\, \Pi' \subseteq \overline{\mathrm{Mov}}^e(X) = \overline{\mathrm{Mov}}(X) \cap \mathrm{Eff}(X)$ DFRP para $\mathrm{Bir}(X) \curvearrowright \overline{\mathrm{Mov}}^e(X)$.

Hoy: $X = A \cong \mathbb{C}^n/\Lambda \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ variedad abeliana. En particular:

1. $\nexists$ curvas racionales en A (pues $\mathrm{Alb}(\mathbb{P}^1)$ es trivial) y luego $\mathrm{Bir}(A) = \mathrm{Aut}(A)$ (ver eg. Corollary 1.44 en O. Debarre "Higher Dim. Alg. Geom.").
2. Como A esp. homogéneo (i.e., $\mathrm{Aut}(A) \curvearrowright A$ transitiva), todo divisor efectivo es nef. Así, $\overline{\mathrm{Mov}}^e(X) = \mathrm{Nef}^e(X)$ y luego (I) $\Longleftrightarrow$ (II) en Var. Abelianas.

[**Teo** (Prendergast - Smith 2012): (I) vale para toda A var. abeliana.

Ejemplo (Kawamata '97): Sea E curva elíptica no CM (i.e., $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{Z}$) y $A = E \overset{n \text{ veces}}{\times \cdots \times} E$ y luego $\rho(A) = \frac{1}{2} n(n+1)$ (cf. $NS(E \times E) \cong pr_1^* NS(E) \oplus pr_2^* NS(E) \oplus \mathrm{End}(E)$; ver eg. Beauville "Some surfaces with maximal Picard number").

Explícitamente, $D_i = pr_i^*(\mathcal{O}_E)$ y $E_{ij} = pr_{ij}^*(\Delta)$ con $i<j$ dan una base de $N^1(A)$ y $\tau : N^1(A) \xrightarrow{\sim} S(n,\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$, $\sum_{1\le i\le n} x_{ii} D_i + \sum_{i<j} x_{ij}(D_i + D_j - E_{ij}) \mapsto [x_{ij}]$ isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal que envía $\mathrm{Amp}(A)$ en $\mathrm{PosDef}\, S(n,\mathbb{R})$ (eg, $\sum D_i \mapsto I_n$) y, por Nakai-Moishezon (cf. Lazarsfeld PAG I): D amplio $\Longleftrightarrow \tau(D) \in \mathrm{PosDef}\, S(n,\mathbb{R})$.

Aquí: $\mathrm{Aut}(A)$ se identifica con $GL_n(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Im}(\mathrm{Aut}(A) \to GL(N^1(A),\mathbb{Z}))$ y con ello $\tau(\theta_* D) = {}^t\theta^{-1} \tau(D) \theta^{-1}$ para $\theta \in GL_n(\mathbb{Z})$.

[Hacia el caso general (Conos en $V \cong \mathbb{R}^\rho$): Sea $C \subseteq V$ cono convexo, abierto, estricto (i.e., $C \cap (-C) = \{0\}$), y $\mathrm{Aut}(C) = \{g \in GL(V),\ g(C) = C\}$. Decimos que C es homogéneo si $\mathrm{Aut}(C) \curvearrowright C$ es transitiva.

Si fijamos $b : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal no-degenerada (y con ello $V \underset{b}{\cong} V^*$), decimos que C es auto dual si $C = C^*$, con $C^* = \mathrm{int}\{\ell \in V^*,\ \ell(v) \geq 0\ \forall v \in C\}$.

Si $\exists\, V_{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$-ev tq $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $C^+ :=$ cono convexo minimal en V conteniendo los $\mathbb{Q}$-puntos racionales de $\overline{C} \subseteq V$.

Ejemplo principal: Sea $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ y $V =$ matrices $n \times n$ hermitianas$/k$, y $b(A,B) := \mathrm{tr}(A\, {}^t\overline{B})$, entonces el cono C de matrices def. positivas en V es homogéneo y auto dual.

Hecho (Vinberg, Ash, Looijenga): Sea $C \subseteq (V, b)$ homogéneo auto dual, entonces $\mathrm{Aut}(C) = G(\mathbb{R})$ para $\exists\, G$ gp. alg reductivo. Si G° está def sobre $\mathbb{Q}$, $\forall\, \Gamma \le G$ subgp aritmético $\exists\, \Delta \subseteq C^+$ DFRP para $\Gamma \curvearrowright C^+$.

↳ eg. $G \le GL_N(\mathbb{Q})$ y $\Gamma = GL_N(\mathbb{Z}) \cap G(\mathbb{Q})$ (en general: "commensurable")

Morrison - Kawamata para variedades abelianas: Sea A var. abeliana.

① $A \underset{isog.}{\sim} A_1^{n_1} \times \dots \times A_k^{m_k}$ con A_i simple y $A_i \not\sim A_j$ si $i \neq j$ (Poincaré)

② $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \simeq M_{n_1}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_1)) \times \dots \times M_{m_k}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A))$ prod. de $\mathbb{Q}$-alg. de división de dim. finita. Así (Albert 1939): Si $\exists$ "(anti-)involución" en $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ entonces

$$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \cong \prod_i M_{r_i}(\mathbb{R}) \times \prod_j M_{s_j}(\mathbb{C}) \times \prod_k M_{t_k}(\mathbb{H}) =: M$$

Idea (cf. Kawamata): Describir $\mathrm{Aut}(A)$, $N^1(A)$, $\mathrm{Amp}(A)$ vía su imagen en M y usar que $\mathrm{Aut}(A) \overset{def}{=} \mathrm{End}(A)^\times \le \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)^\times$ es un subgp aritmético $/\mathbb{Q}$ (cf. Hecho)

③ Involución de Rosati (cf. O. Debarre "Tores et variétés abéliennes complexes" Ch. VI):

El morfismo $\Phi : \mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Hom}_{gp}(A, \mathrm{Pic}^\circ(A))$, $L \cong \mathcal{O}_A(D) \mapsto (x \mapsto \mathcal{O}_A(t_x^* D) \otimes \mathcal{O}_A(-D))$ cumple: (i) Si $L \in \mathrm{Amp}(A)$, $\Phi(L) : A \xrightarrow[isog.]{\sim} \mathrm{Pic}^\circ(A) =: \hat{A}$ isogenia (isom si $h^0(L) = 1$)

(ii) $\Phi(L) = 0 \in \mathrm{Hom}_{gp}(A, \mathrm{Pic}^\circ(A)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \iff L \in \mathrm{Pic}^\circ(A)$.

Si L amplio y $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$, entonces $u' := \Phi(L)^{-1} \circ \hat{u} \circ \Phi(L) \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ y se cumple: $(u')' = u$, $(uv)' = v'u'$, $(u+v)' = u' + v'$, i.e., $(\ )' \curvearrowright \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ involución ✓

④ Si $\Phi(L)$ isogenia entonces $\Phi(L)^{-1}$ bien def. en $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ y con ello obtenemos un morfismo $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$, $\mathcal{O}_A(D) \mapsto \Phi(L)^{-1}\Phi(\mathcal{O}_A(D))$ y por (ii) desciende a $\tau : N^1(A) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A) \cong M$ morfismo inyectivo.

⑤ La involución de Rosati corresp. vía τ a ${}^t\overline{(\ )}$ y con ello se verifica que:

$\tau(N^1(A)) = \prod_i \mathrm{Herm}_{r_i}(\mathbb{R}) \times \prod_j \mathrm{Herm}_{s_j}(\mathbb{C}) \times \prod_k \mathrm{Herm}_{t_k}(\mathbb{H})$ y además

$\tau(\mathrm{Amp}(A)) = \prod_i \mathrm{PosDef}\,\mathrm{Herm}_{r_i}(\mathbb{R}) \times \prod_j \mathrm{PosDef}\,\mathrm{Herm}_{s_j}(\mathbb{C}) \times \prod_k \mathrm{PosDef}\,\mathrm{Herm}_{t_k}(\mathbb{H}) =: C$

Hecho $\Longrightarrow$ $\Gamma := \mathrm{Aut}(A) \curvearrowright C^+ \underset{def}{\cong} \mathrm{Nef}^e(A)$ actúa con DFRP $\Pi \subseteq \mathrm{Nef}^e(A)$ ■