Teoría de Hodge en combinatoria

1. Politopos
2. Látices geométricos (matroides simples)

Teoría de Hodge en estos dos casos.

3. $\boxed{\text{Abanicos y sus relaciones.}}$ → Teoría de Hodge para abanicos.

$\boxed{\text{Abanicos}}$ ⟷ modelo de anillo de cohomología/intersección.

En algunos casos hay variedad proyectiva.

$\Sigma \longleftrightarrow \underbrace{A^*(\Sigma)}$

combinatoria

↳ diccionario.

combinatoria/geom v.s. álgebra

Lo que podemos aprender se puede extender y probar para muchos abanicos.

Invariantes algebraicas de la "cohomología" ⟷ Invariantes combinatorias del abanico.

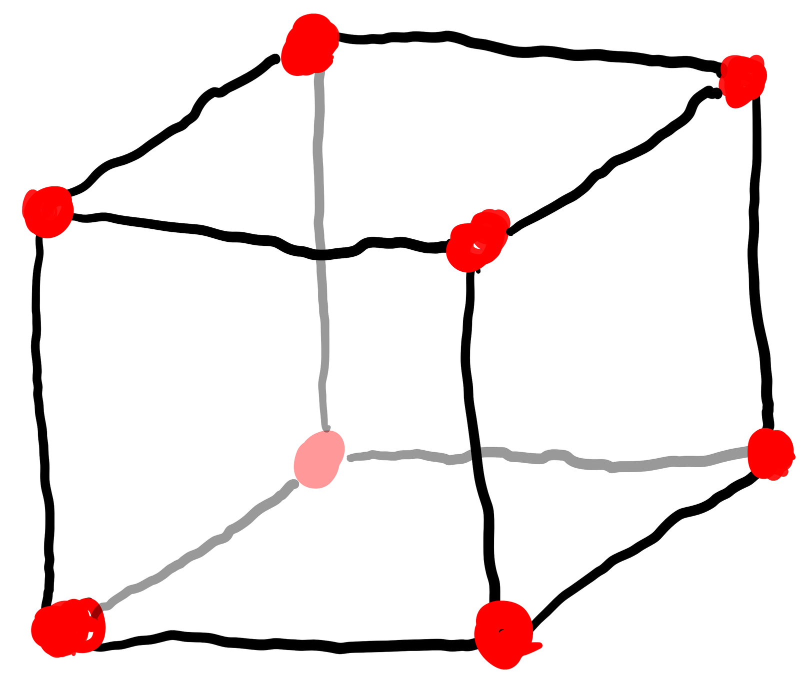
Originalmente: la geometría nos da teoremas con consecuencias en combiatoria.

Actual: la geometría algebraica inspira teorías con implicaciones profundas en comb.

① Politopos.

$P =$ Envolvente convexa de finitos puntos en $\mathbb{R}^n$. $=$ conjunto acotado cortado por finitas desigualdades lineales. $(a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq d)$

$f_0 = 8$
$f_1 = 12$
$f_2 = 6$
$f_3 = 1$

$\mathbb{R}^3 \supseteq$ 

- Envolvente de 8 puntos
- Descrito por 6 desigualdades. $0 \leq x_i \leq 1$

Dado un funcional lineal $\ell \in (\mathbb{R}^n)^\vee$. podemos preguntarnos que puntos de P maximizan ℓ.

Cara: subconjunto de P que maximiza un funcional lineal.

Las caras son politopos!
y son finitas!

Cada cara tiene dimension: la del subespacio afin más pequeño que la contiene.

P corresponde al funcional 0!

Dado un politopo P, definimos
f_i = # de caras del politopo de dimensión i.

Pregunta clásica/fundamental

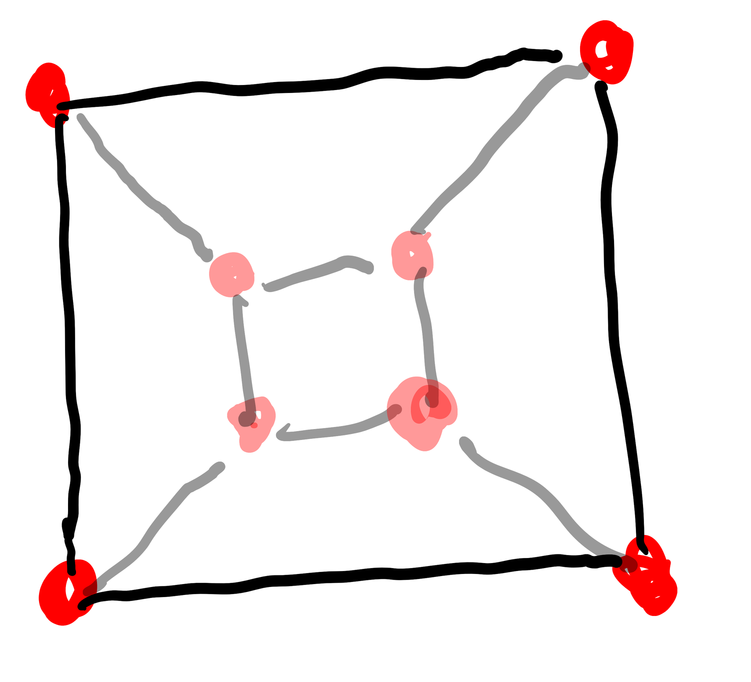
¿Qué vectores $(a_0, \dots, a_d)$ son el f-vector de un politopo?

Restricciones obvias:

$$a_d - a_{d-1} + a_{d-2} + \dots + (-1)^d a_0 = (-1)^d.$$

característica de Euler.

En dimensión 3: Teorema de Steinitz
Grafos planos y tres conexos.



② Láticos geométricos:

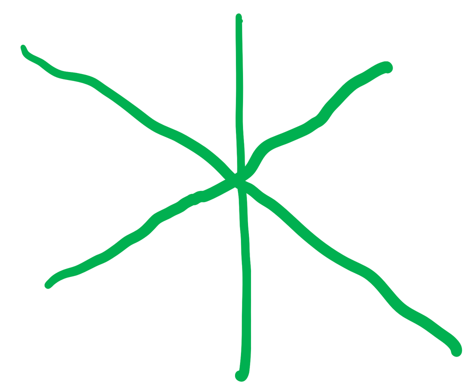
$\mathcal{H}$ arreglo de hiperplanos / $\mathbb{F}^n$.

$\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$

$H_i \subseteq \mathbb{F}^n$ subespacio de dim $n-1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ejemplo:}\\ \text{En } \mathbb{R}^3 \text{ ponemos } 3 \text{ hiperplanos.}\\ x_1 - x_2 = 0,\quad x_1 - x_3 = 0,\quad x_2 - x_3 = 0.\end{array}}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

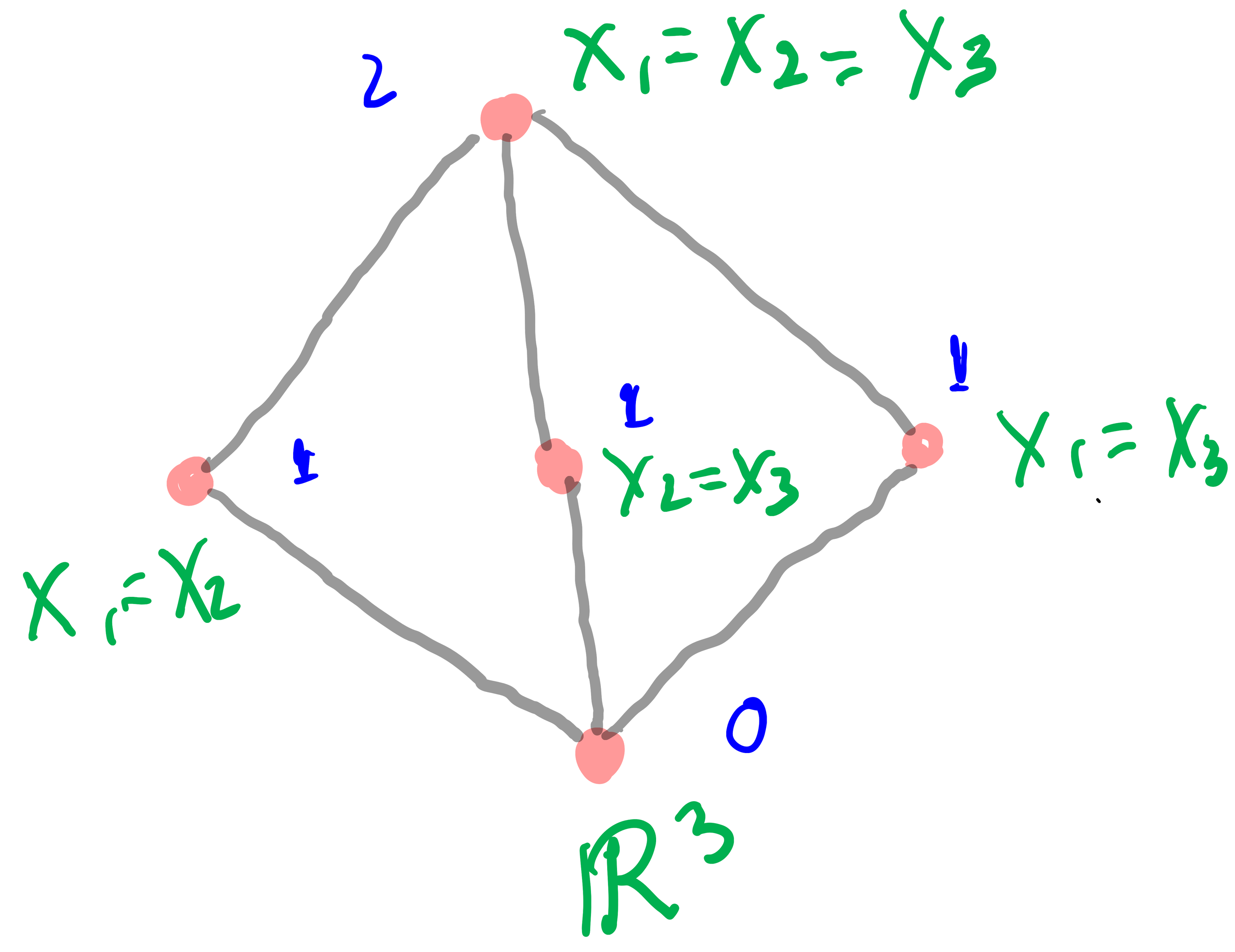


Látice geométrico (de $\mathcal{H}$).

$$L_{\mathcal{H}} = \left(\left\{ S = \bigcap_{i \in A} H_i \;\middle|\; A \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}, <\right)$$

$$S < S' \iff S \supseteq S'.$$

$\left(\begin{array}{c} A = \emptyset. \\ S = \mathbb{F}^n \\ \text{Agregado} \\ \text{"artificialmente".} \end{array}\right)$



Observación: La combinatoria de $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ entiende muchos aspectos geométricos/topológicos de $\mathcal{H}$.

(ver: Stanley: Lectures on hyperplane arrangements)

·) $\mathcal{L}_H$ es un conjunto parcialmente ordenado (poset)

① ☆ tiene mínimo y máximo.
$\mathbb{F}^n$, $\bigcap_{i \in \{1,\dots,h\}} H_i$ resp.

② ☆ $\mathcal{L}_H$ es graduado: $\deg S = \operatorname{codim} S$.

látice ③ ☆ tiene mínimas cotas superiores $\wedge$ & intersección.
y máximas cotas inferiores. $\vee$.

Átomos: elementos de grado uno. (hiperplanos). de $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$.

Los elementos de $\mathcal{L}_H$ se llaman "flats" en inglés. Español? plano?

④ ☆ Todo elemento es la mínima cota superior de un conjunto de átomos.

⑤ ☆ (Axioma de Steinitz-MacLane)

L flat, x, y átomos $x, y \not< L$.

si $x < L \wedge y \Rightarrow y < L \wedge x$.

<u>Definición:</u> Un $\boxed{\text{látice geométrico}}$ es un poset P que satisface ①, ②, ③, ④ y ⑤

(Matroide: Látice geométrico L + función

$$f : L_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

L_1: átomos.)

Interesante:

No todos los látices vienen de arreglos de hiperplanos y hay una discusión muy interesante sobre agregar axiomas nuevos

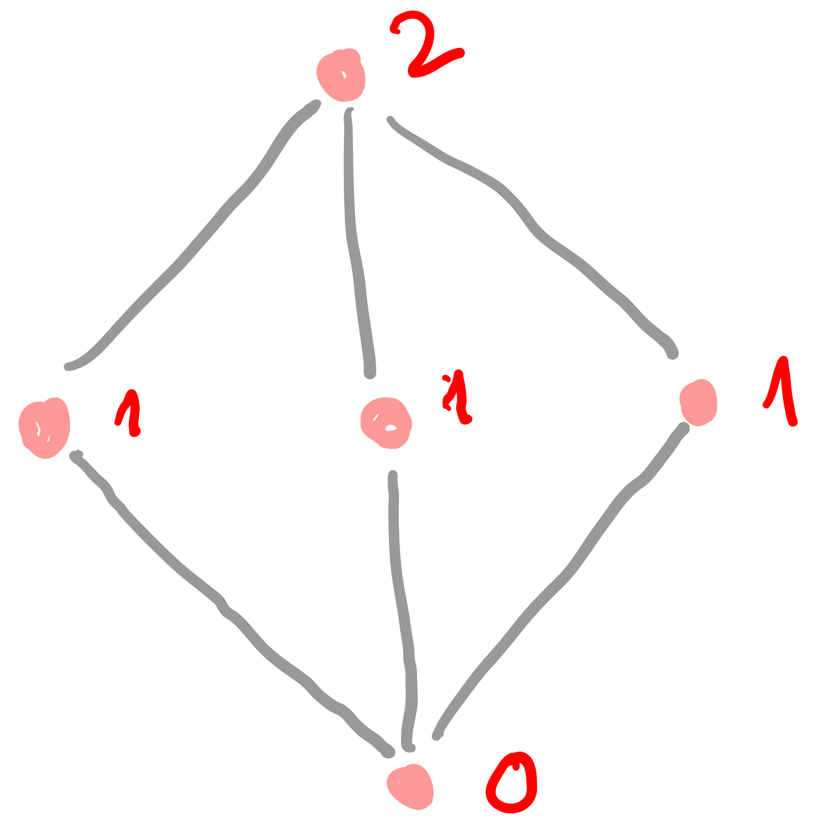
The lost axiom of matroid theory (is lost forever)

Dos vectores asociados a láticos geométricos.

#'s de Whitney de tipo 2.

$(W_0, W_1, \ldots, W_d)$

W_i = # de elementos de $\mathcal{L}$ de grado i.



$(1, 3, 1)$.

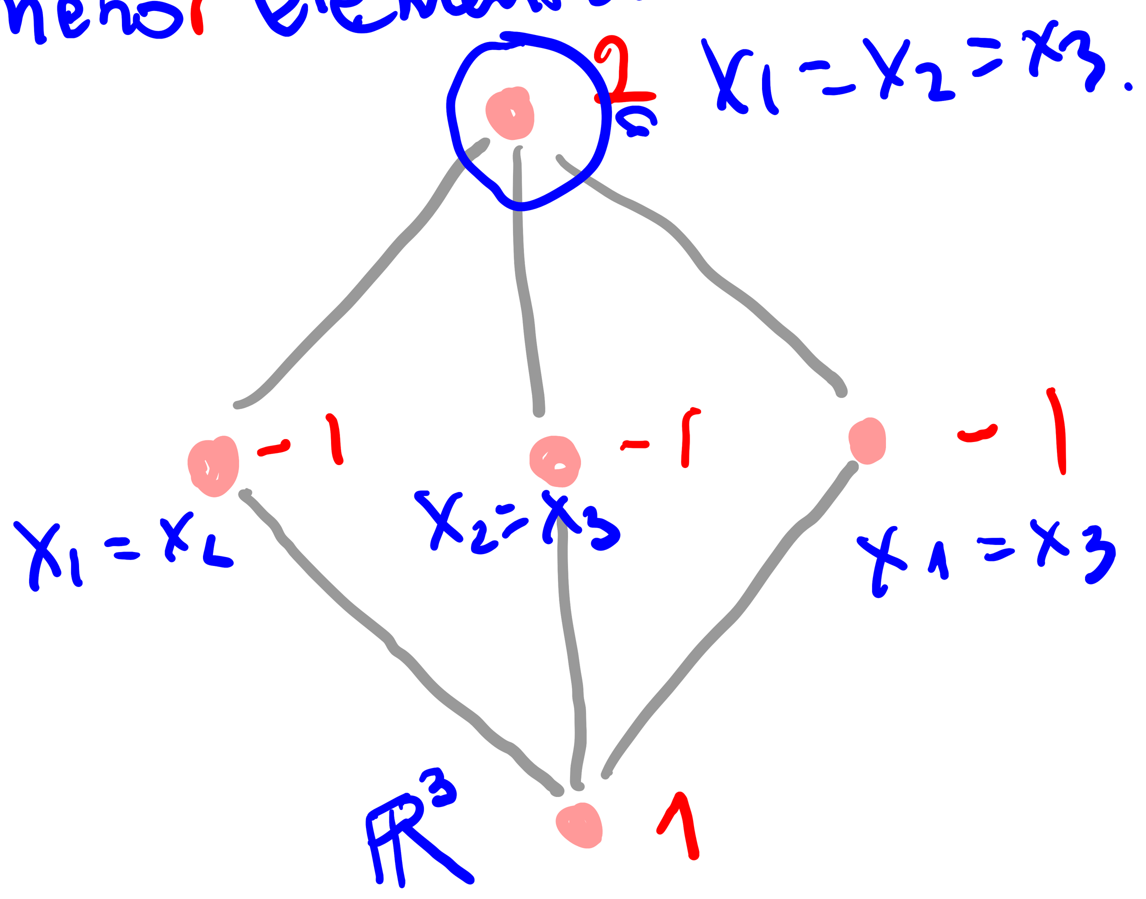
#'s de Whitney de tipo 1

función de Möbius:

$$\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}.$$

$$\mu(0) = 1, \qquad \mu(x) = -\sum_{y<x} \mu(y).$$

menor elemento.



(w_0, w_1, w_2)

$(1, -3, 2)$

$(W_0, W_1, \dots, W_d)$

$$\boxed{W_i} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ \deg(L) = i}} \mu(L)$$

números de Whitney de tipo 1.

Pregunta general

¿Qué se puede decir de los números de Whitney? ¿Que vectores aparecen cómo números de Whitney de algún tipo?

Dos conjeturas (ahora teoremas).

1. $w_{i-1} w_{i+1} \leq w_i^2$ (log concavidad)
   Heron-Rota-Welsh. (70's)
   Adiprasito-Huh-Katz.

2. i) $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$
   ii) $W_i \leq W_{d-i}$

   Top Heavy conjecture. Dowling-Wilson 80's.
   Enumerating points, lines, etc.

La primera cayó hace 4 años y generó un efecto dominó.

(3) Abanicos:

Para atacar (aspectos de) los teoremas de arriba la herramienta principal el la teoría de abanicos y sus funciones.

$\rightsquigarrow$ Σ abanico.

$B^*(\Sigma)$ $\rightsquigarrow$ funciones polinomiales a trozos. en Σ

$$A^*(\Sigma) = B^*(\Sigma) \big/ \langle \text{funciones lineales} \rangle.$$

anillo de Chow de Σ

frecuentemente se comporta como si fuera una Cohomología.

Pasos a seguir:

(1) Desribir cómo estudiar $A^*(\Sigma)$ y que propiedades han sido útiles.

(2) De un objeto P ó L construir un abanico. Σ_P ó Σ_L.

(3) Leer invariantes de P o L en $A^*(\Sigma_P)$ o $A^*(\Sigma_L)$

Antes de definir abanicos en general, nombramos los abanicos que nos interesarán en un principio.

- El abanico normal de un politopo: $P \in \mathbb{R}^d$.

  Σ_P abanico en $(\mathbb{R}^d)^*$.

  $\sim_P$ en $(\mathbb{R}^d)^*$. $l_1 \sim_P l_2$ sii

  l_1 y l_2 maximizan la misma cara. de P.

  Conos de Σ_P: clausuras de clases de equivalencia de $\sim_P$.

- El abanico de Bergman de un látice geométrico $\mathcal{L}$ (Geometria tropical)

  E = conjunto de átomos de L.

  $A \subseteq E$ cerrado sii existe $L \in \mathcal{L}$.

  $A = \{e \in E \mid e \leq L\}$.

$\mathbb{R}^E$

$\cup$

$B_{\mathcal{L}} = \{f: E \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(-\infty, r)$ es cerrado $\forall r \in \mathbb{R}\}$

$S \subseteq E$, χ_S función característica de S.

Conos: Si $\mathcal{F}: (F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k)$ cerrados.

$\chi_{F_1}, \ldots, \chi_{F_k}$ genera cono $\subseteq B_{\mathcal{L}}$

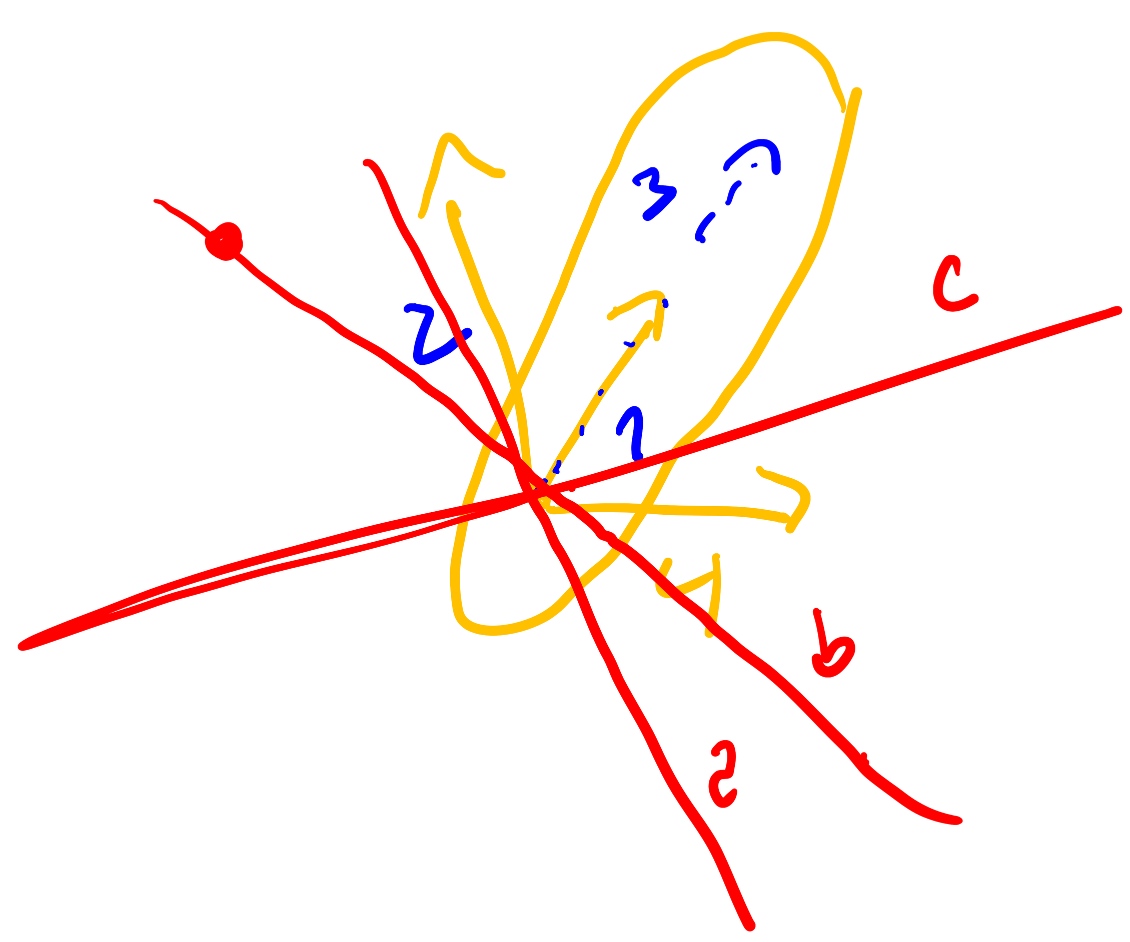
Esos conos "triangulan" $B_{\mathcal{L}}$ para obtener un abanico $\Sigma_{\mathcal{L}}$.

La idea va a ser explotar la geometría de los abanicos Σ_p y Σ_h $\blacksquare$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{latice geométrico.}$$

$\mathcal{I} \subseteq 2^{\{1,2,3,4\}}$.

$I \in \mathcal{I} \iff$ columnas corresp. lin. indep



$f(a) = 1$

$f(b) = 2$

$f(c) = 1$