Teoría de Hodge en combinatoria II: abanicos.

Objetivo: Describir el anillo de Chow $A^*(\Sigma)$ de un abanico y explicar qué es el "paquete de Kähler".

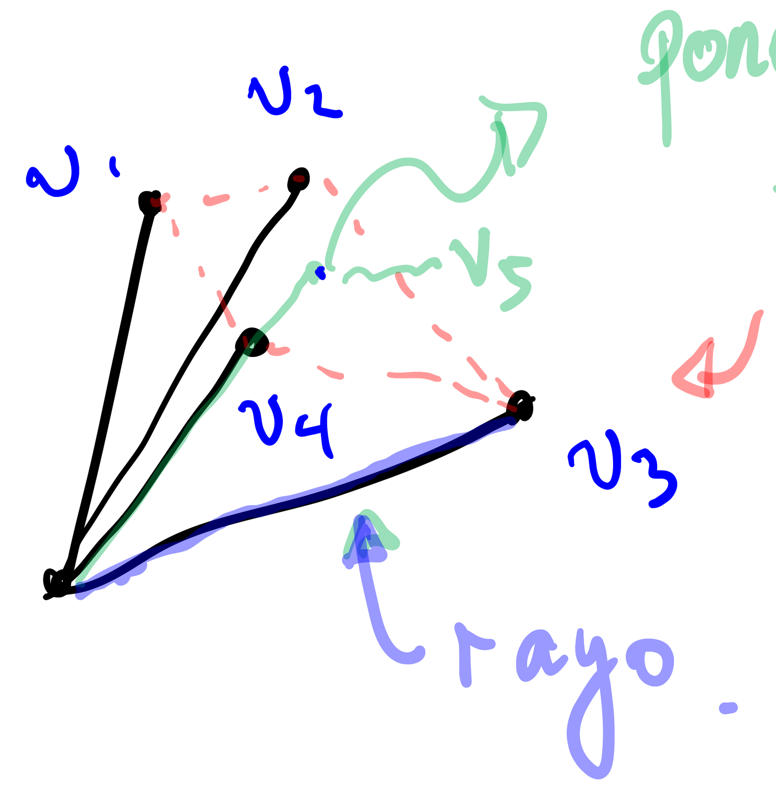
Cono: (polihedral) $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$, $\quad \overset{C}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{pos}(v_1,\dots,v_n)}} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$.

simplicial: $v_1, \dots, v_k$ linealmente independientes.

∂C = frontera topologica de $C \subseteq \mathrm{span}(C)$.

unión de conos

rayos: v_i tal que $\mathrm{pos}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \not\ni v_i$.



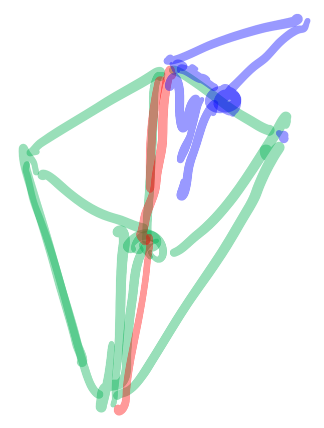
poner el vector V_5 no cambia el cono

cono en $\mathbb{R}^3$.
no simplicial.

Cara: cono C' de la forma $C \cap H \subseteq \partial C$.
H hiperplano.

El cono arriba tiene cuatro rayos y cuatro caras de dimensión dos.

Cono punteado: C punteado $\Longleftrightarrow$ $\{0\}$ es cara.



Abanico: Σ colección de conos tal que

★ si $c \in \Sigma$ y c' cara de c entonces $c' \in \Sigma$

★ $c, c' \in \Sigma \Rightarrow c \cap c'$ es cara de ambos.

I.e Σ consiste de conos bien pegados.

Nota: si un cono en Σ es puntado, todos lo son.

La idea es estudiar funciones definidas en Σ y relacionar el anillo de funciones con la combinatoria de Σ.

En general, se puede trabajar con abanicos arbitrarios y hay trabajo de Kara muy interesante al respecto. Por ahora nos enfocamos en abanicos simpliciales.

$$|\Sigma| = \bigcup_{c \in \Sigma} c \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Funciones PL: (Piecewise linear)

Una función $f : |\Sigma| \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^d} \mathbb{R}$ se llama lineal a trozos si es continua y para todo $c \in \Sigma$ $f|_c$ es una función lineal. $(f(0) = 0)$

Algunas observaciones:

① Sea $PL(\Sigma)$ el espacio de funciones lineales a trozos (en el origen son 0).

$$\boxed{PL(\Sigma)} \subseteq C(|\Sigma|) = \{ f : |\Sigma| \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}.$$

② Los abanicos simpliciales son significativamente mas faciles. Si C es un cono simplicial de dimensión k y $v_1, v_2, \dots, v_k$ son puntos en los rayos de C (generadores)

$$\Rightarrow \{ \underset{f \text{ lineal}}{f : C \longrightarrow \mathbb{R}} \} = \{ f : \{v_1, \dots, v_k\} \longrightarrow \mathbb{R} \}.$$

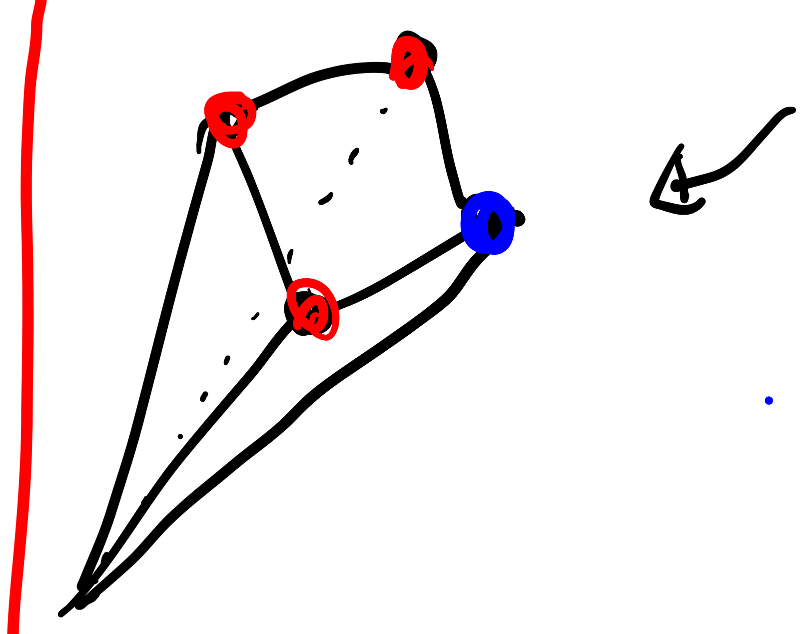
Es decir, si Σ es simplicial (todos los conos son simpliciales), entonces

$$\boxed{PL(\Sigma)} \cong_{\mathbb{R}} \{ \underline{f} : \{\overset{\text{generadores de } \Sigma}{\text{rayos de } \Sigma}\} \longrightarrow \mathbb{R} \}.$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} PL(\Sigma) < \infty$
$\|$
$\#$ de rayos.

en variedades tóricas hay escogencia canónica de un punto en cada rayo.

En general esto no es tan sencillo.



cono no simplicial.

El valor en tres rayos determina el valor en el cuarto, y hace que $A^1(\Sigma)$ sea mucho mas complicado.

Definición: $D^*(\Sigma)$ es el subálgebra de $C(\Sigma)$ generada por $\boxed{PL(\Sigma)}$. $PL(\Sigma) = D^1(\Sigma)$

* $D^*(\Sigma) = D^0(\Sigma) \oplus D^1(\Sigma) \oplus \dots$ - es un álgebra graduada con $D^1(\Sigma) = PL(\Sigma)$.

$\{ \sum_{(i)} \ell_1^{(i)} \ell_2^{(i)} \dots \ell_k^{(i)} \mid \ell_i \in PL(\Sigma) \}$.
finita ← restringido a un cono.

* $\boxed{D^k(\Sigma)}$ = es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por productos de elementos en $PL(\Sigma)$, i.e funciones en Σ que restringidas a un cono son polinomios de grado k.

tenemos polinomios homogeneos de grado d.

* Para cada rayo de $\sigma_i \in \Sigma$ tomamos $v_i \in \sigma_i$ un vector de norma 1.

$f : \{v_1, \dots, v_k\} \to \mathbb{R}$.

x_i = función característica $\in$ $\chi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$\sigma_1, \dots, \sigma_k$ son los rayos de Σ. v_i

$$\psi : \mathbb{R}[y_1, \dots, y_k] \longrightarrow \underline{D^*(\Sigma)}$$
$$y_i \longmapsto x_i.$$

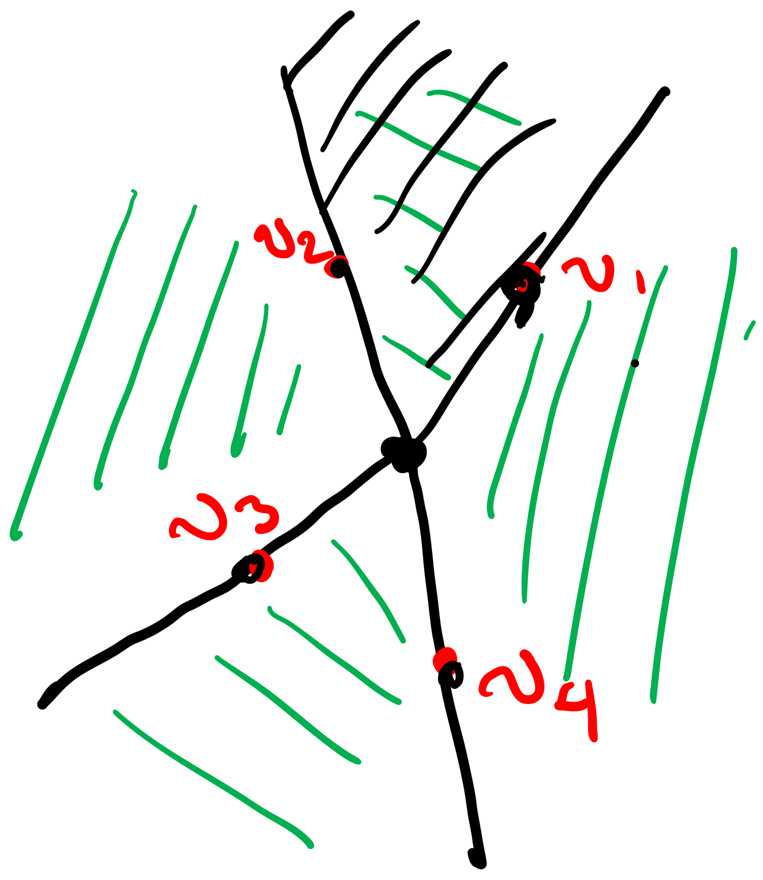
este mapa tiene un kernel.

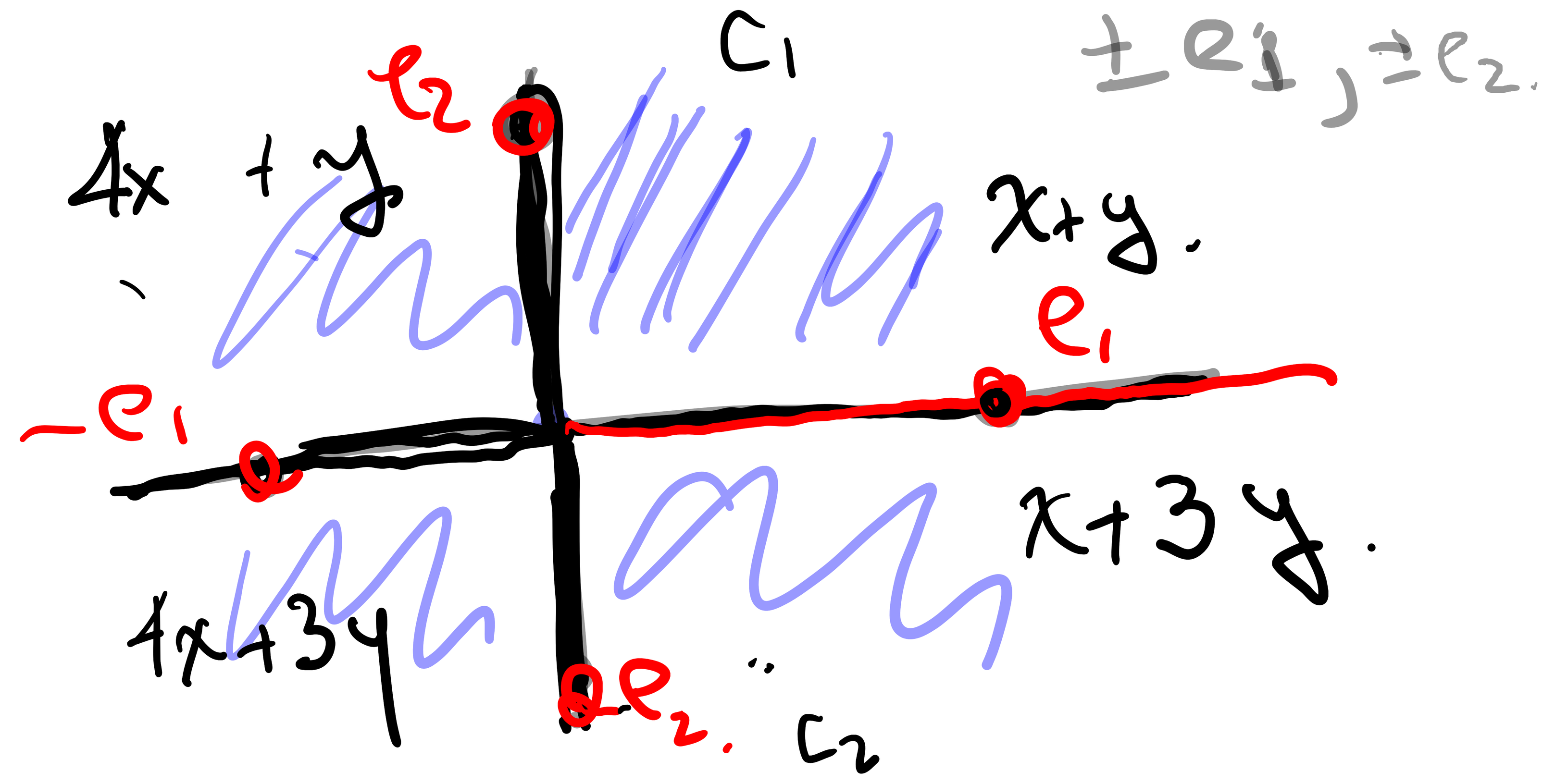
Mapa sobreyectivo. de $\mathbb{R}$-álgebras.

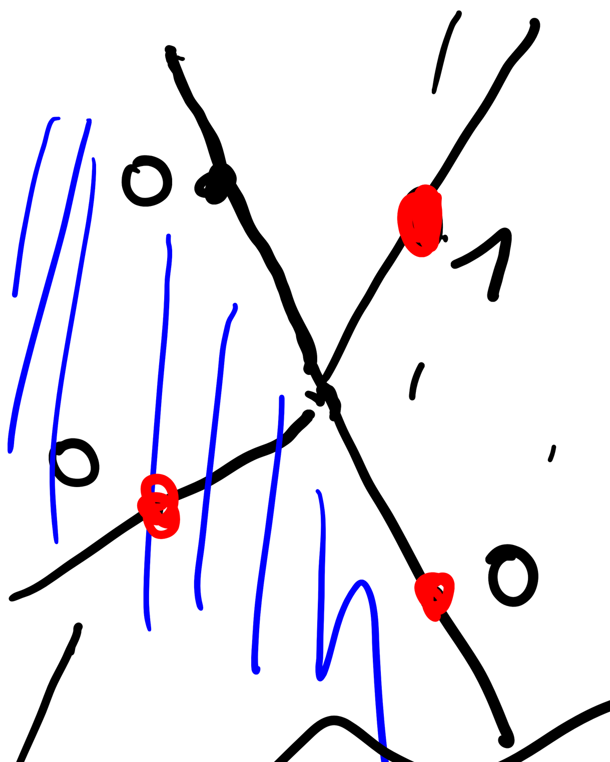
$\ker(\psi) = \langle \prod_{i \in A} y_i \mid \{\sigma_i \mid i \in A\}$ no generan un cono en $\Sigma \rangle$

← ideal de Stanley-Reisner.

Ejemplo:

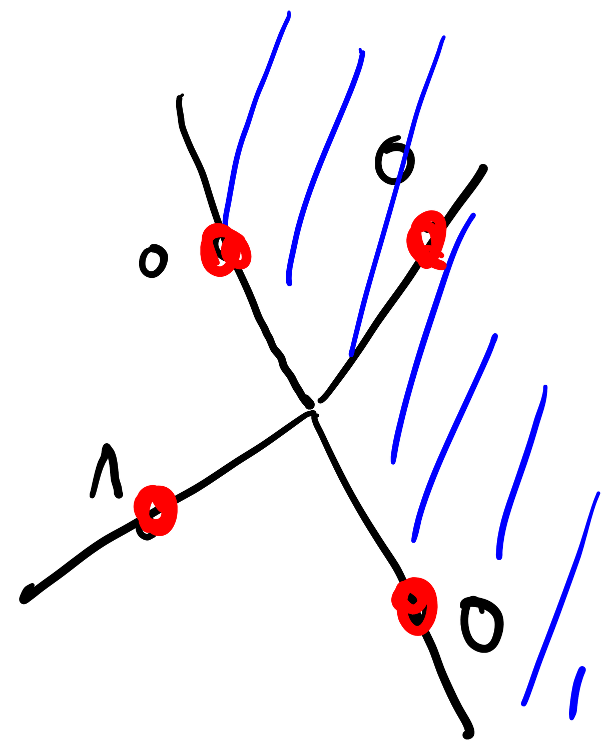
$\Sigma =$ 



$\chi_1 \rightsquigarrow$ 

$$\overbrace{\frac{\mathbb{R}[y_1,y_2,y_3,y_4]}{\underbrace{\langle y_1 y_3, y_2 y_4\rangle}}}^{\text{base de } PL(\Sigma)} \Big/ \underbrace{\langle y_1 - y_3, y_2 - y_4\rangle}$$

$\chi_1 \chi_3 = 0.$

$\chi_3 =$ 

Stanley-Reisner

$$\underline{D^*(\Sigma)} = \frac{\mathbb{R}[y_1,\dots,y_4]}{\langle y_1 y_3, y_2 y_4\rangle}$$

¿Y si todo es "combinatorico" para qué el Yoga de los abanicos?

En $D^*(\Sigma)$ hay unas funciones especiales: las que son globalmente lineales.

Si Σ tiene n rayos y está metido en $\mathbb{R}^d$, las funciones lineales forman un subespacio de $PL(\Sigma)$ de dimensión d.

$\Downarrow$
dim n

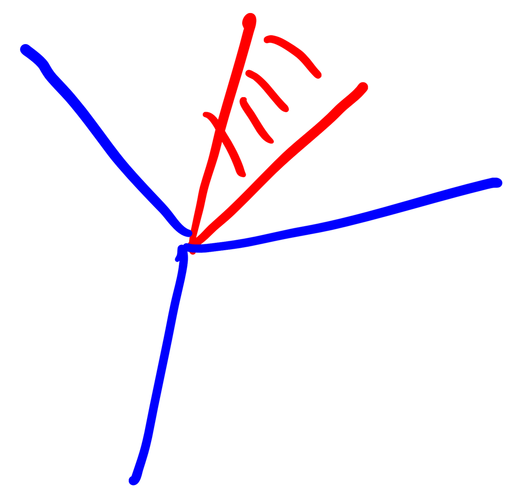
$\mathfrak{m}$ = ideal generado por estos funcionales lineales.
= polinomios sin término constante.

Definición:

El anillo de Chow $\boxed{A^*(\Sigma)}$ es el cociente

$$D^*(\Sigma)/m.$$

¿Qué tiene de interesante?



$$SR(\Sigma) \cong D^*(R).$$

es un anillo del que sabemos varias cosas. i.e

$$\boxed{\dim_{Kr} \underbrace{SR(\Sigma)}_{\text{Stanley-Reisner}} = \dim(\Sigma)}$$

Y un teorema de Hochster relaciona la topología de Σ con la cohomología local de $SR(\Sigma)$.

Para muchos Σ, $A^*(\Sigma)$ es un anillo de Chow de una variedad suave.

Como tal tiene mucha estructura. $\dim A^i(\Sigma)$

★ $\boxed{A^*(\Sigma)}$ es un anillo Artiniano graduado.

i.e $\dim_{\mathbb{R}} A^*(\Sigma) < \infty$, $A^*(\Sigma) = A^0(\Sigma) \oplus \cdots \oplus A^d(\Sigma)$

$d = \dim(\Sigma) = \dim_{Kr} SR(\Delta)$.