Teoría de Hodge en combinatoria III.

La vez pasada:

Σ abanico simplicial. $\subseteq \mathbb{R}^d$.

funciones polinomiales a trozos. (comb.)

$$A^*(\Sigma) = \mathcal{D}^*(\Sigma)^{\sim} / m \rightsquigarrow$$

funciones polinomiales globales sin término constante. (geom.)

anillo de Chow de Σ.

Discutimos que $A^*(\Sigma)$ es un cociente de $\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_k]$ donde k es el número de rayos.

El próximo objetivo es discutir que tipo de propiedades son los que quisieramos estudiar.

Ahora vamos a explicar cómo $A^*(\Sigma)$ se comporta como un anillo de cohomología.

El paquete de Kähler

$\dim(\Sigma) = d$.

La estructura de "cohomología".

Con frecuencia $A^*(\Sigma)$ se comporta bien.
En particular, decimos que $A^*(\Sigma)$ es valuado si $\underline{A^d(\Sigma)} \cong \mathbb{R} \; (\cong A^0(\Sigma))$.

En general fijamos un isomorfismo entre $A^d(\Sigma) \xrightarrow{\deg} \mathbb{R}$ que llamamos el mapa de grado. (En muchas situaciones este mapa tiene interpretaciones interesantes)

Dualidad de Poincaré:

$A^d \overset{\deg}{\cong} \mathbb{R}$.

Mapa: $\underline{A^r(\Sigma)} \times A^{d-r}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$.

forma bilineal

$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \underline{\deg(fg)}$.

Es un emparejamiento perfecto $\forall r = 0, 1, \ldots, d$.
si $\forall f \in A^r(\Sigma)$ $f \neq 0$ $\exists g \in A^{d-r}(\Sigma)$ t.q. $\langle f, g \rangle \neq 0$. $\}$ y al revés

$\Rightarrow \boxed{A^r(\Sigma) \cong A^{d-r}(\Sigma).}$ (espacios vectoriales de la misma dimensión.

Ej: $A^* = \mathbb{R}[x]/\langle x^5\rangle$. un álgebra graduada.

$\deg(x^4) = 1$.

$$\underset{\mathbb{R}}{A^0} \oplus \underset{x\mathbb{R}}{A^1} \oplus \underset{x^2\mathbb{R}}{A^2} \oplus \underset{x^3\mathbb{R}}{A^3} \oplus \underset{x^4\mathbb{R}}{A^4}.$$

$$\langle s_1 x^1, s_2 x^3\rangle = \deg(s_1 s_2 x^4) = s_1 s_2.$$

$(A^\bullet(\Sigma), \deg)$ satisface el paquete de Hodge, si satisface dualidad de Poincaré y si existe un cono abierto y no vacío $\mathcal{K} \subseteq A^1(\Sigma)$ tal que

abierto

$\mathbb{R}^E$ //

espacio vect $/\mathbb{R}$

funciones lineales a trozos, cerrado bajo mult. por $\mathbb{R}_{>0}$

$x \in A^k(\Sigma)$, $\ell \in \mathcal{K}$ $\ell x \in A^{k+1}(\Sigma)$

(1) $\forall\, \ell \in \mathcal{K}$ $\forall\, r < \frac{d}{2}$.

$$\boxed{\ell^{d-2r}} : A^r(\Sigma) \longrightarrow A^{d-r}(\Sigma)$$
$$\sigma \longmapsto \ell^{d-2r}\cdot\sigma.$$

importante saber escogerlo.

es un isomorfismo. (Hard Lefschetz).

$(\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} A^0 \leq \boxed{\dim(A^1)} \leq \ldots \leq \dim A^{\lfloor \frac{d}{2}\rfloor} = \dim A^{\lceil \frac{d}{2}\rceil} \geq \ldots \geq \dim A^d$

estas dimensiones tienen interpretaciones

(2) $r < \frac{d}{2}$. $\subseteq A^r$

$$\boxed{Q_\ell^r(\Sigma)} = \ker\left(\ell^{d-2r+1} : A^r(\Sigma) \longrightarrow A^{d-r+1}(\Sigma)\right) \cong A^{r-1}(\Sigma)$$

ℓ^{d-2r}, $\cong$, $A^{r-1}(\Sigma)$, ℓ

$\forall\, \ell \in \mathcal{K}$.

$$S_\ell^r : Q_\ell^r(\Sigma) \times Q_\ell^r(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(p,q) \longmapsto (-1)^r \deg(pq\,\ell^{d-2r}).$$

es definido positivo. $S^r_\ell(p,p) \geq 0$. (igualdad $p=0$)

(Relaciones de Hodge-Riemann).

★ ¿Y en combinatoria qué?

→ Muchos números que nos interesan en combinatoria son dimensiones o grados de objetos "naturales".

★ Las álgebras que satisfacen dualidad de Poincaré abundan. Grabe[84] probó que si $|\Sigma| = \mathbb{R}^d \Rightarrow \boxed{A^\cdot(\Sigma)}$ satisface dualidad de Poincaré (Y algo mucho mas general).

$A^d(\Sigma) \cong \mathbb{R}$.

★ La mayoría de pruebas de HL (Hard-Lefschetz) en combinatoria utilizan las relaciones de Hodge-Riemann, probarlas juntas es más fácil.

★ Hay abanicos que no satisfacen dualidad de Poincaré.

(en caso en que el abanico no sea completo).

★ Hay abanicos (Huh-Babaee) que satisfacen PD y HL pero no HR. (modulo el cono)

$\ell \in A^1(\Sigma)$ genérico.

Hay que descubrir quién es $\mathcal{K}$.

★ La existencia de $\mathcal{K}$ es no trivial. En particular, un abánico simplicial completo con $\mathcal{K}$ manejable sólo se conoce si Σ es el abanico normal de un politopo. (convexidad)

$\boxed{\mathcal{K} = \{f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{convexas}\}.}$

En general es difícil definir quién es $\mathcal{K}$.

Conjetura Karim Adiprasito

$\rightarrow$ La conjetura g de McMullen para esferas trianguladas (probada para politopos por Stanley creando estas conexiones) tiene como gran dificultad reemplazar convexidad por topología.

★ Feichtner y Yuzvinski probaron que para un látice geométrico $\mathcal{L}$, $\boxed{A^\bullet(\Sigma_{\mathcal{L}})}$ es el anillo de Chow de una variedad suave $\boxed{\text{NO PROYECTIVA}}$.

Algunas veces proy.

definir $\mathcal{K}$ y probar que $A^\bullet(\Sigma_{\mathcal{L}})$ no ve esta no proyectividad es la magia del famoso AHK.

En el ejemplo $A = \mathbb{R}[x]/(x^5)$ $\quad A' = \text{span}_{\mathbb{R}}\{x\}$.

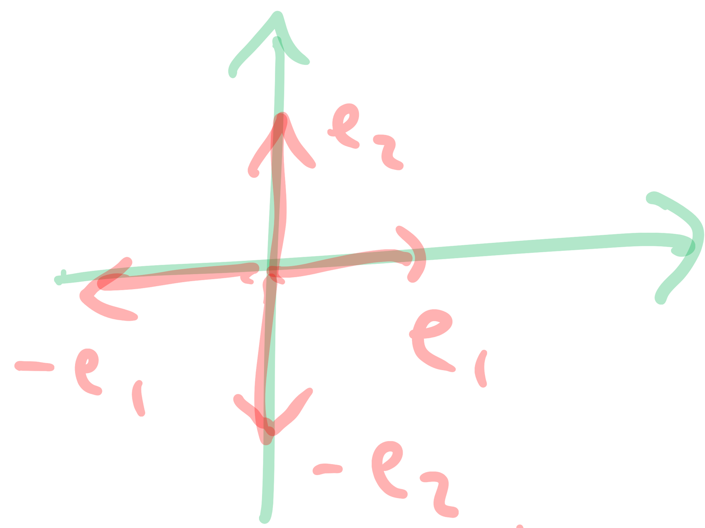
podemos tomar $\mathcal{Y}\mathcal{L} = \{sx \mid s \geq 0\}$.

$A^0 \xrightarrow{x^4} A^4 \qquad A^i \cong \mathbb{R}$.

$A^1 \xrightarrow{x^2} A^3$

HL $\rightsquigarrow$ multiplicar por x da isomorfismo.

HR $\rightsquigarrow$ trivial, ℓ^{d-2r+1} tiene kernel 0.



Ej 2: En $\mathbb{R}^n$, tomamos Σ los ortantes. Conos

A base $e_1, \dots, e_n$.

$\text{pos}\{e_1, \dots, e_n\}$, $\text{pos}\{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ...

2^n conos. $\quad \text{pos}\{s_1 e_1, \dots, s_n e_n\}$ $\; s_i \in \{\pm 1\}$.

No es muy difícil ver que

$$\underbrace{D^\vee(\Sigma)} \cong \mathbb{R}[\overset{e_1}{x_1}, \dots, \overset{e_n}{x_n}, \overset{-e_1}{y_1}, \dots, \overset{-e_n}{y_n}] \Big/ \underline{\langle x_i y_i \rangle}.$$

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, y_{j_1}, \dots, y_{j_\ell}\}$

$x_i \longmapsto \chi_{e_i}$ $\rightsquigarrow$ $\overset{i_r \neq j_m}{\text{única}}$ función lineal a trozos $\chi_{e_i}(e_j) = \delta(e_i, e_j)$

(M) $\to$ funciones lineales generadas por $x_i - y_i$ $= \langle x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n \rangle$.

$$\leadsto \boxed{A^*(\Sigma) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \Big/ \langle x_1^2, \dots, x_n^2 \rangle.}$$

$$A^1(\Sigma) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_1 \leadsto \text{polinomios lineales en } x_1, \dots, x_n.$$

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

$A^i \to$ generado por monomios libres de cuadrados.
e.v./$\mathbb{R}$.

Podemos tomar $\boxed{\mathcal{K} = \{s_1 x_1 + \dots + s_n x_n \mid s_i > 0\}}$

La pareja $(A^*(\Sigma), \mathcal{K})$ satisface el paquete de Kähler.

Prueba en general: buen ejercicio.

$n = 4$. $\boxed{\ell = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}$. $x_i (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$.

$$A^1(\Sigma) \xrightarrow{\ell^2 \cdot} A^3(\Sigma).$$

base

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1x_2x_3 & x_1x_2x_4 & x_1x_3x_4 & x_2x_3x_4 \\ \hline x_1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ x_2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ x_3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ x_4 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \leadsto \det \neq 0.$$

$$\deg\left(A^4(\Sigma)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1x_2x_3x_4 \longmapsto 1.$$

Q^1_ℓ

$$Q^1_\ell = \left\{ \ker : A^1(\Sigma) \xrightarrow{\ell^3} A^4(\Sigma) \right\}.$$

$x_i(x_1+\dots+x_4)^3$.

$$\begin{array}{c|c} & x_1x_2x_3x_4 \\ \hline x_1 & \\ x_2 & \\ x_3 & \\ x_4 & \end{array}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\ker(\ell^3) = \left\{ \begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4, \\ a_1+a_2+a_3+a_4=0 \end{array} \right\}.$$

$\deg(p^2\ell^2)$

$$-\deg\left[(a_1x_1+\dots+a_4x_4)^2(x_1+\dots+x_4)^2\right]$$

$$\|$$

$$-\deg\left[\underbrace{4\left(\sum a_ia_j\right)}\, x_1x_2x_3x_4.\right].$$

$$\|$$

$$-4\left(\sum a_ia_j\right)$$

$$\|$$

$$2\left(\sum a_i^2\right)$$

$$\vee$$

$$0.$$

Politopos.

Σ abanico normal de un politopo simple.

Σ abanico completo. (simplicial).

f_i = # de caras de dimensión (i.

$$\boxed{\boxed{\sum_{i=0}^{d} \dim A^i(\Sigma)\, t^i} = \sum_{i=0}^{d} f_i\, t^i (1-t)^{d-i}}.$$

$$\boxed{HL := \{ \ell \in A^1(\Sigma),\ \text{tal que} \}}.$$

ℓ es convexa

¿aquí usamos que Σ viene de un politopo.

HL $\iff$ caracterización numérica de $\underline{\mathrm{Poin}(A_i(\Sigma), t)}$ (Macaulay sequence)

Stanley $\iff$ caracterización de f-vectores de politopos simpliciales.

Matroides / lattices geométricos $\mathcal{L}$ átomos E.
simples.

$\mathcal{L} \subseteq 2^E$

$|\Sigma_h| = \{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^E$

t.q. $f^{-1}(-\infty, r) \subseteq E$
cerrado en E.

funciones submodulares en $\mathcal{L}_A$.

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ submodulares.

si $f(A) + f(B) > f(A \cup B) + f(A \cap B)$

Podría ser que tomemos

funciones estrictamente convexas
en Σ. (no necesariamente existen)

Desigualdad de Khov.-Tessier

$a \in \overline{\mathcal{K}}$ - y $b \in \mathcal{K} \subseteq A^1(\Sigma)$

$\underline{d}$

$(A^{*}(\Sigma), \mathcal{K})$ sat. PK.

$$\boxed{\underset{M_0}{\deg(a^d)},\ \underset{M_1}{\deg(a^{d-1}b)},\ \dots,\ \underset{M_d}{\deg(b^d)}}$$

$$\boxed{M_{i-1}M_{i+1} \le M_i^2}$$