

Teoría de Hodge en combinatoria V

Látices geométricos.

L conjunto ^{finito} parcialmente ordenado
es un látice geométrico si:

(1) Tiene máximo $\hat{1}$ y mínimo $\hat{0}$.

(2) Tiene mínimas cotas superiores.

(3) Es graduado: cualquier cadena

$$\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_r = \hat{1} \quad \rightarrow \text{y cubre a } x.$$

tiene longitud fija = r .

$r: L \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \rightarrow$ longitud mayor cadena $\prec x$.

$$\left(\begin{array}{l} x \prec y \text{ si } x \prec y \text{ y } y \\ x \prec z \prec y \Rightarrow x = z \text{ o } z = y. \end{array} \right)$$

(4) Es atómico: todo elemento de L es la mínima cota superior de los átomos menores.
(átomos: elementos que cubren $\hat{0}$)

(5) Si a_1, a_2 son átomos, $y \in L$

$$\text{f.o.q. } a_i \prec y.$$

$$y \quad a_2 \prec y \wedge a_1 \prec y \quad \Rightarrow a_1 \prec y \wedge a_2 \prec y$$

$\&$ mínima cota superior

Hay muchos ejemplos.

\mathcal{H} arreglo de hiperplanos en V .

i.e. $\exists l_1, \dots, l_n \in V^*$, con $\mathcal{H} = \{ \ker(l_i) \mid i=1, \dots, n \}$.
 $l_i \neq 0$.

$$L = \left(\left\{ W \subseteq V \mid W = \bigcap_{i \in I} H_i, I \subseteq [n] \right\}, \subseteq \right).$$

$$W < W' \text{ si } W' \subseteq W.$$

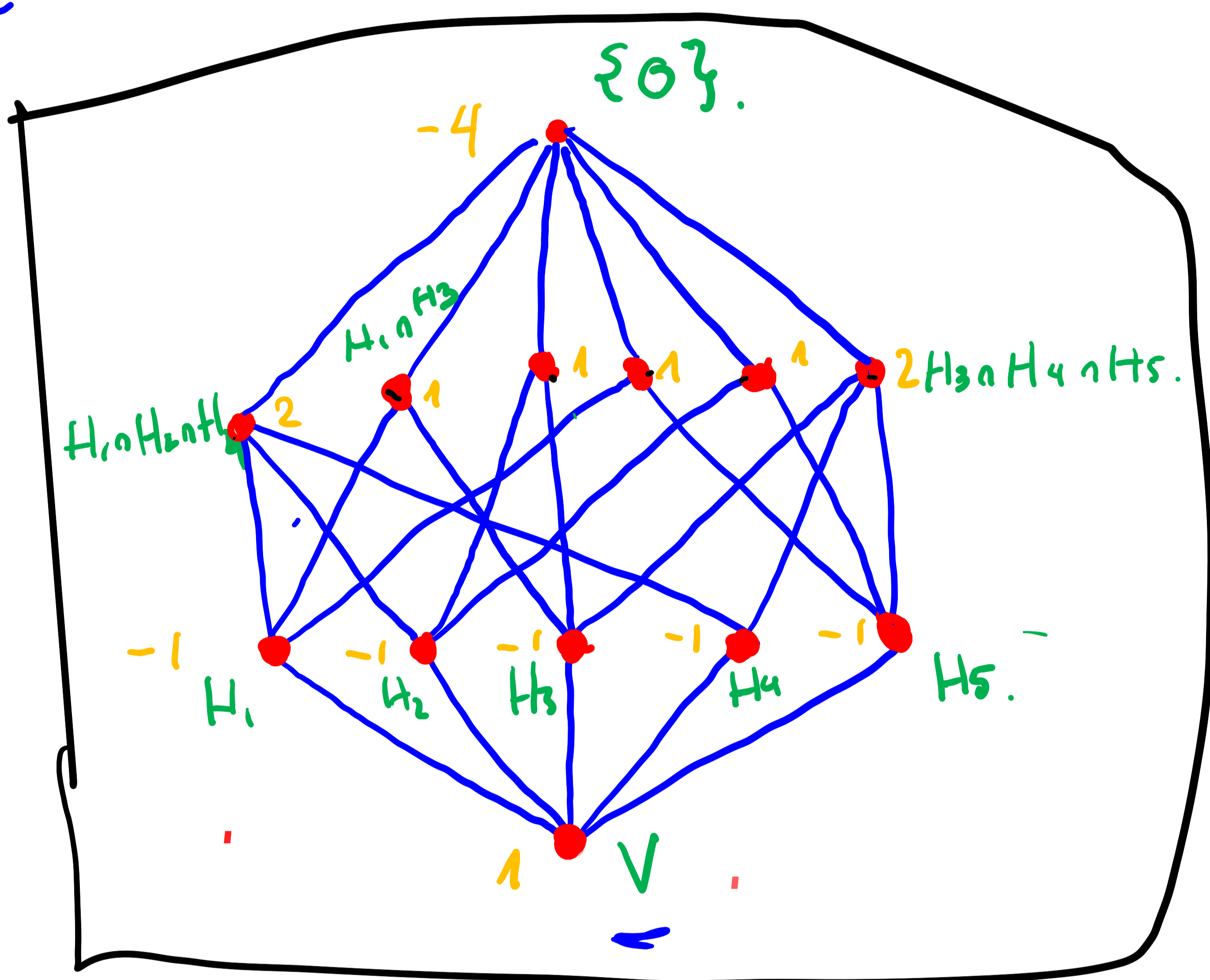
Ej: En \mathbb{R}^3 , base $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\} \in (\mathbb{R}^3)^*$.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	
e_1^*	1	0	0	1	1] $l_i \rightsquigarrow H_i$
e_2^*	0	1	0	1	1	
e_3^*	0	0	1	0	1	

¿Cómo se ve H ?

Buen ejercicio: $L \cong$

subespacios de V^* generados por subconjuntos de e_1, \dots, e_5 .



$$1 - 5x + 8x^2 - 4x^3$$

¿Que significan los axiomas?

- ① Tenemos a V y $\bigcap_{i=1}^n H_i$
- ② Nuestros subespacios se pueden intersectar.
- ③ Los subespacios tienen dimensión.
- ④ Todo elemento en intersección de hiperplanos
- ⑤ $\bigcap_{i \in I} H_i \not\subseteq H_j, H_k$.

$$H_j \cap \left(\bigcap_{i \in I} H_i \right) \subseteq H_k.$$

$$\Rightarrow H_k \cap \left(\bigcap_{i \in I} H_i \right) \subseteq H_j$$

Función de Möbius:

$$\mu: L \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

$$\cdot) \mu(\hat{0}) = 1$$

$$\cdot) \mu(x) = - \sum_{y < x} \mu(y).$$

$$\mu_L(x) = \sum_{\ell \in L} \mu(\ell) x^{rk(\ell)}.$$

$rk(\ell)$ = longitud máx. cadena entre 0 y ℓ .

en arreglos! = $\text{codim } \ell$.

$\mu_L(x)$ mide varias invariantes topológicas.

$\mu_L^i =$ coeficiente de x^i , $\mu(1) = 0$.

facil: $\mu_L^{2k} \geq 0$, $\mu_L^{2k+1} \leq 0$

En nuestro ejemplo:

$\mu_L(x) = 1 - 9x + 8x^2 - 4x^3$. ¿Que pueden ser estos números?

$\tilde{\mu}_L(x) = \frac{\mu_L(x)}{x-1}$

Conj: $\mu_{i+1} \mu_{i-1} \leq \mu_i^2$. (concavidad logaritmica). (por Herron-Rotg Welsh 70's)
 significa que hay algo geométrico por detrás.

El abanico de Bergman

$E(L) =$ átomos de L .

$F \subseteq E$ es cerrado/plano? si $\exists l \in L$ t.q. $F = \{e \in E, e < l\}$.
 " " "
flat - open (algunas veces)

$L_G := (\{F \mid F \subseteq E \text{ cerrado}\}, \subseteq) \cong L$. Mapa $L \rightarrow L_G$
 $e \mapsto F_e$

$\hat{\mathcal{B}} = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{-1}(-\infty, r) \text{ cerrado}\} \subseteq \mathbb{R}^E \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^E / \cong$
 $\mathcal{B} = \pi(\hat{\mathcal{B}})$
 topologización de un subespacio vectorial
 $\cong = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum f(e) = 0\}$

Claramente como

y se le puede dar una estructura simplicial.

Bandera de cerrados: $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \dots \subsetneq F_k$.

Rayos: $S \subseteq E$ $e_S: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $e_S(e) = \begin{cases} -1 & \text{si } e \in S \\ 0 & \text{si } e \notin S. \end{cases}$

$e_S \in \mathcal{B} \Leftrightarrow S$ es cerrado.

Rayos del abanico: generados por $\{e_F \mid F \text{ cerrado}\}$.

Conos: C_{F_1}, \dots, C_{F_k} forman un cono, si
 y solo si F_1, \dots, F_k forman una bandera F
 de L . El cono resultante lo llamamos C_F cono en $\mathbb{R}^E/\mathbb{1}$

Notar: $s_1 C_{F_1} + \dots + s_k C_{F_k} \in \mathcal{B}$ si $s_i \geq 0 \forall i$.

Sea $\mathcal{O}(L)$ el conjunto de todas las banderas
 que contienen a $\hat{0}$ y $\hat{1}$.

$$\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{F \in \mathcal{O}(L)} C_F$$

La geometría de $\tilde{\mathcal{B}}$ se
 puede usar para estudiar L .

Estos conos le dan a \mathcal{B} una estructura
 de abanico, Σ_L .

Observaciones:

- Para vez pasa que Σ_L es completo.

- $|\Sigma_L| \subseteq \mathbb{R}^E/\mathbb{1}$
 $\dim(\Sigma_L) = \text{rk}(L) - 1 = \dim(V) - 1$.

- Σ_L es un abanico punteado.

- $|\Sigma_L| \cap \mathcal{D}^{|\mathbb{E}|-2} \sim \bigwedge \mathcal{D}^{r-2}$
 # de cúspides = $|M(L)|$
 equivalencia homotópica. \mathbb{R} topología no trivial.

TMA (Adiprasito-Huh-Katz) \rightarrow falta escoger el cono.

$\mathcal{A}^*(\Sigma_L)$ satisface el paquete de Kähler.
 con un cierto cono.

\rightarrow Buena presentación combinatoria.

$$\mathcal{A}^*(\Sigma_L) \cong \mathbb{R}[\gamma_{F_i} \mid F_i \text{ cerrado}] / \langle \gamma_{F_i} \gamma_{F_j} \mid F_i \neq F_j \rangle + \langle \sum_{i \in F} \gamma_F = \sum_{j \in F} \gamma_F \mid i, j \in F \rangle$$

★ El cono amplio \mathcal{K} está definido como $l: E \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente submodular en L .

$\forall F, F'$ cerrados $G = \overline{F \cup F'}$, $H = \underbrace{F \cap F'}_{\text{cerrado.}}$
↑ cerrado generado por.

$l(F) + l(F') \geq l(G) + l(H)$

existen por varias razones y en particular son importantes en optimización.

Feichtner-Yuzvinski 03



Si L viene de un arreglo de hiperplanos, \mathbb{R}_+ $A^*(\Sigma_L)$ es el anillo de Chow de una variedad proyectiva suave:

$\overline{\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H} \subseteq \mathbb{P}^{E-1}$ es una variedad. (el arreglo en sí mismo).

tiene varias singularidades: todos los puntos en un subespacio de L que sea no trivial



La "compactificación maravillosa" de De Concini y Procesi.

la variedad que resulta de hacer Blow-ups de cada uno de estos subespacios. Comenzando por la intersección

En este caso, $\binom{n}{h}$ el teorema de AHK es geo alg clásica.

⊗ En general, AHK define varios zbanicos que modelan este proceso de compactificación, aunque no hay variedad para compactificar.

⊛ De hecho, ellos prueban que $A^*(\Sigma_L)$ es isomorfo al anillo de Chow de una variedad proyectiva suave $\Leftrightarrow L$ es representable. } *vergo*

⊛ Las consecuencias combinatorias son mucho más difíciles de ver.
 $(\dim_{\mathbb{R}} A^k(\Sigma_L))$ no es un vector de números muy estudiados.

La aplicación:

Desigualdad de Khovanskii-Tessier.

Si $(A^*(\Sigma), K)$ satisface el paquete de Kähler.

$\alpha \in A^1(\Sigma)$, $p \in K$. Entonces la sucesión

$$S(\alpha, p) = (\deg(\alpha^d), \deg(\alpha^{d-p}), \dots, \deg(p^d))$$

es logarítmicamente cóncava. \Leftarrow esto usa HR y matrices definidas positivas.

Juego: Encontrar $\alpha, p \in A^1(\Sigma_L)$ tal que la sucesión mida números que los interesan.

AHK: Fijando $j \in E$ $\alpha_j = \sum_{i \in E} \gamma_i^j$ $\in A^j(\Sigma_L)$.
generadores de los rayos

$$\beta_j = \sum_{i \in F} \gamma_i^j$$

$$\alpha, \beta \in \overline{K}$$

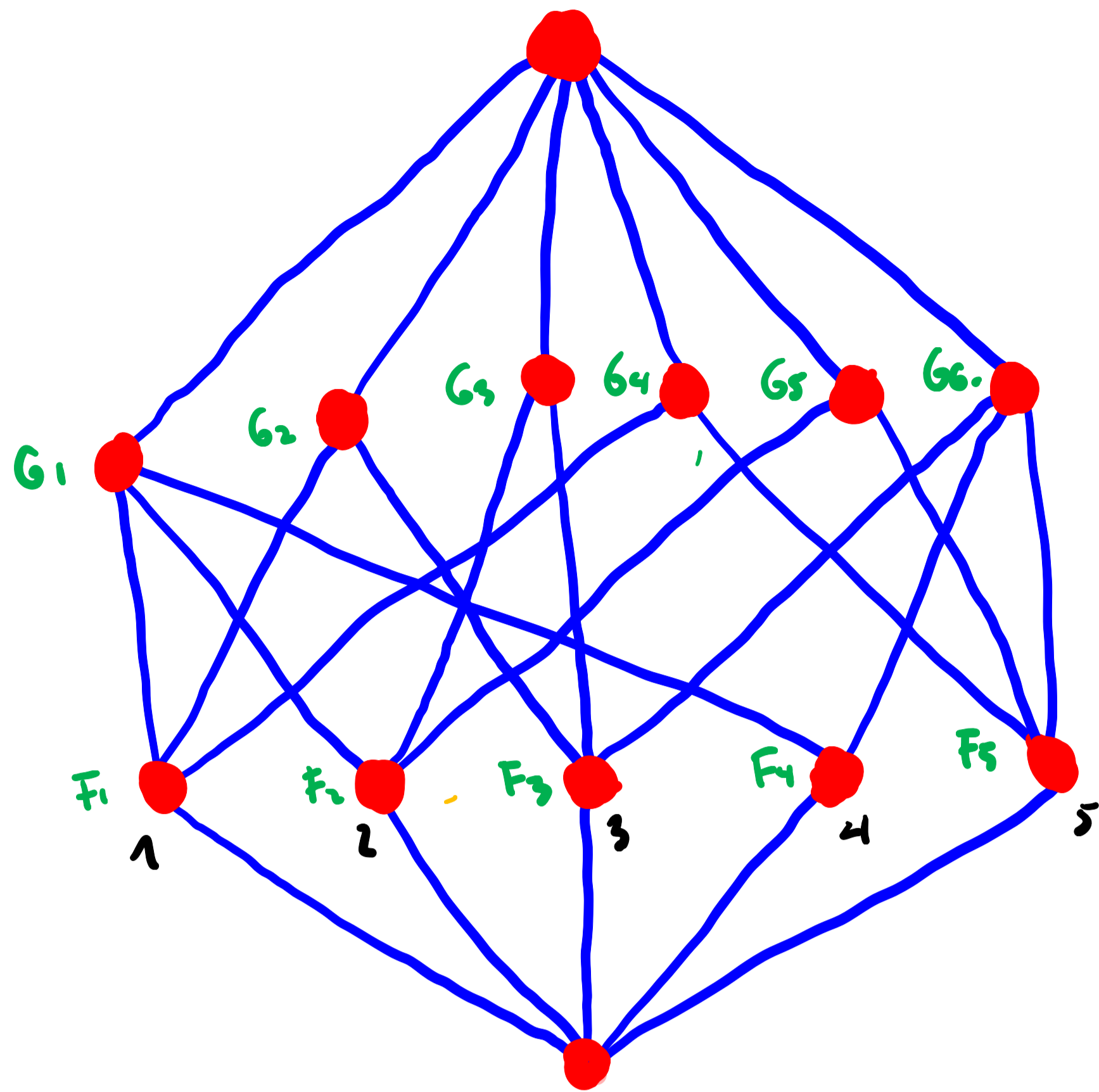
$$j \deg(\alpha^i p^{d-i}) = |M_i|$$

los números interesantes.

$S(\alpha, \beta)$ satisface concavidad logarítmica.

TMA NO TRIVIAL. QUE NO DEPENDE DE J.

Ej:



$$S = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_5, Y_1, \dots, Y_6]$$

F's. G's.

$$I_1 = \langle X_i X_j, Y_i Y_j, X_i Y_i, X_i Y_5, X_i Y_6, X_2 Y_2, X_2 Y_4, X_2 Y_6, \dots \rangle$$

$$I_2 = \langle F_1 + G_1 + G_2 + G_3 - (F_2 + G_1 + G_3 + G_5), F_1 + G_1 + G_2 + G_3 - (F_3 + G_2 + G_3 + G_4), F_1 + G_1 + G_2 + G_3 - (F_4 + G_1 + G_6), F_1 + G_1 + G_2 + G_3 - (F_5 + G_1 + G_5 + G_6) \rangle$$

grado 1.

$$A^*(\Sigma_L) = S / (I_1 + I_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R} \quad \text{grado 2.}$$

grado 0 grado 2

Nota: $\dim_{\mathbb{R}}(S/I_1) = 2$. Alg. conmutativa no predice mucho sobre partirlo con I_2 .

Ver el paquete de Kähler en un ejemplo más grande es complicado.

Si $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\} \subseteq \mathbb{V}^{\dim h.}$ $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{V}^{\dim h.}$ lin. indep.

$$\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$$

$$\Rightarrow L = B_n \leftarrow \text{Bodeano.}$$

$$B = \text{arreglo de braid.} = \{ \text{ker}(x_i - x_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \}$$

$$= \text{cono normal del permutahedro.}$$

$S_n \subseteq \mathbb{R}^n$ perm. coordenadas
 $\mathbb{T}T_n = \text{conv}(\text{Orbita de } (1, 2, \dots, n))$

$$A^*(\Sigma_L) = \text{Anillo de Chow de la variedad torica correspondiente.}$$

