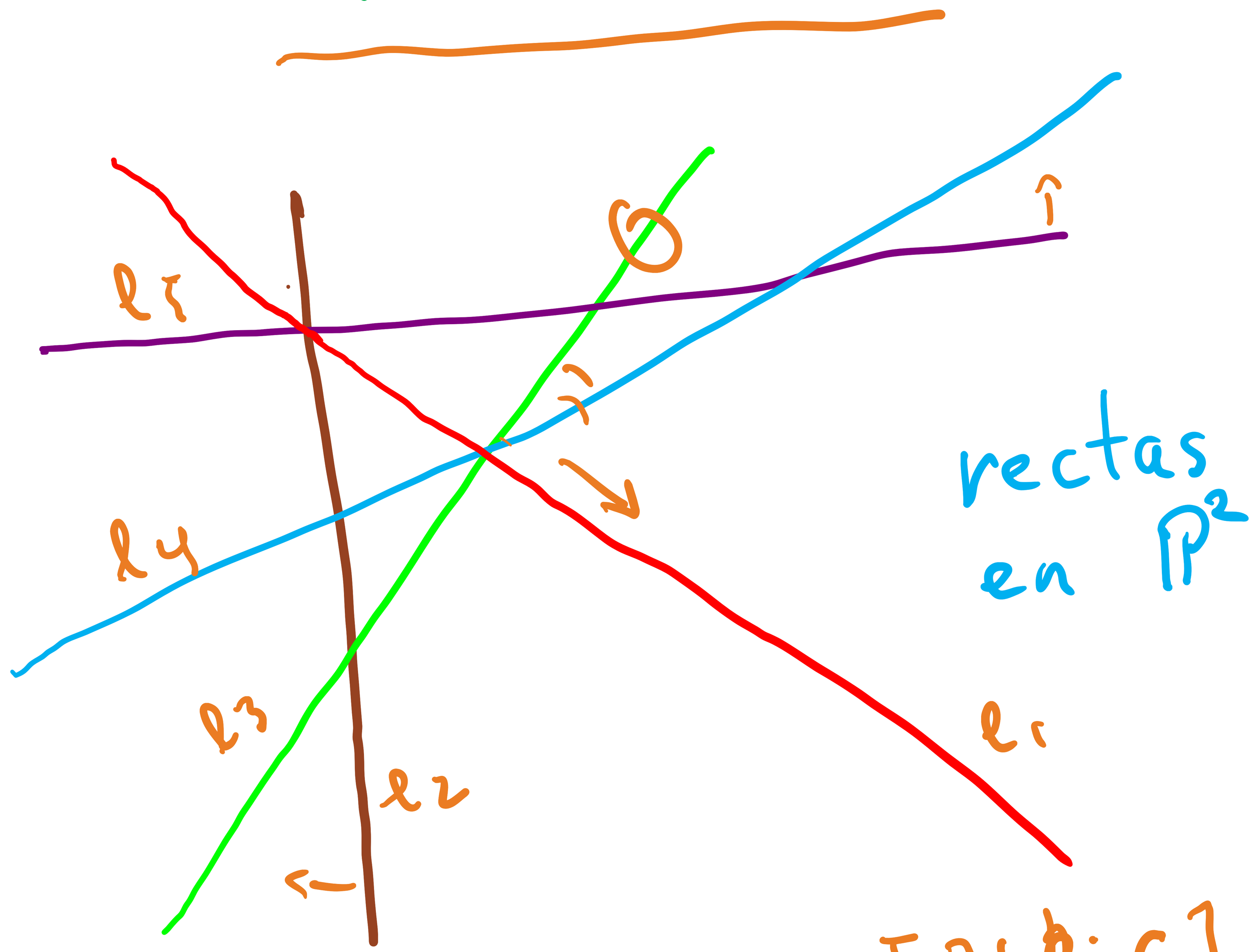
El teorema de universalidad de Mnëv.

La idea es estudiar las parametrizaciones de un arreglo de rectas con combinatoria fija y probar que dichos espacios son muy complicados.

① Espacios de realizaciones: siempre / $\boxed{\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}}$.

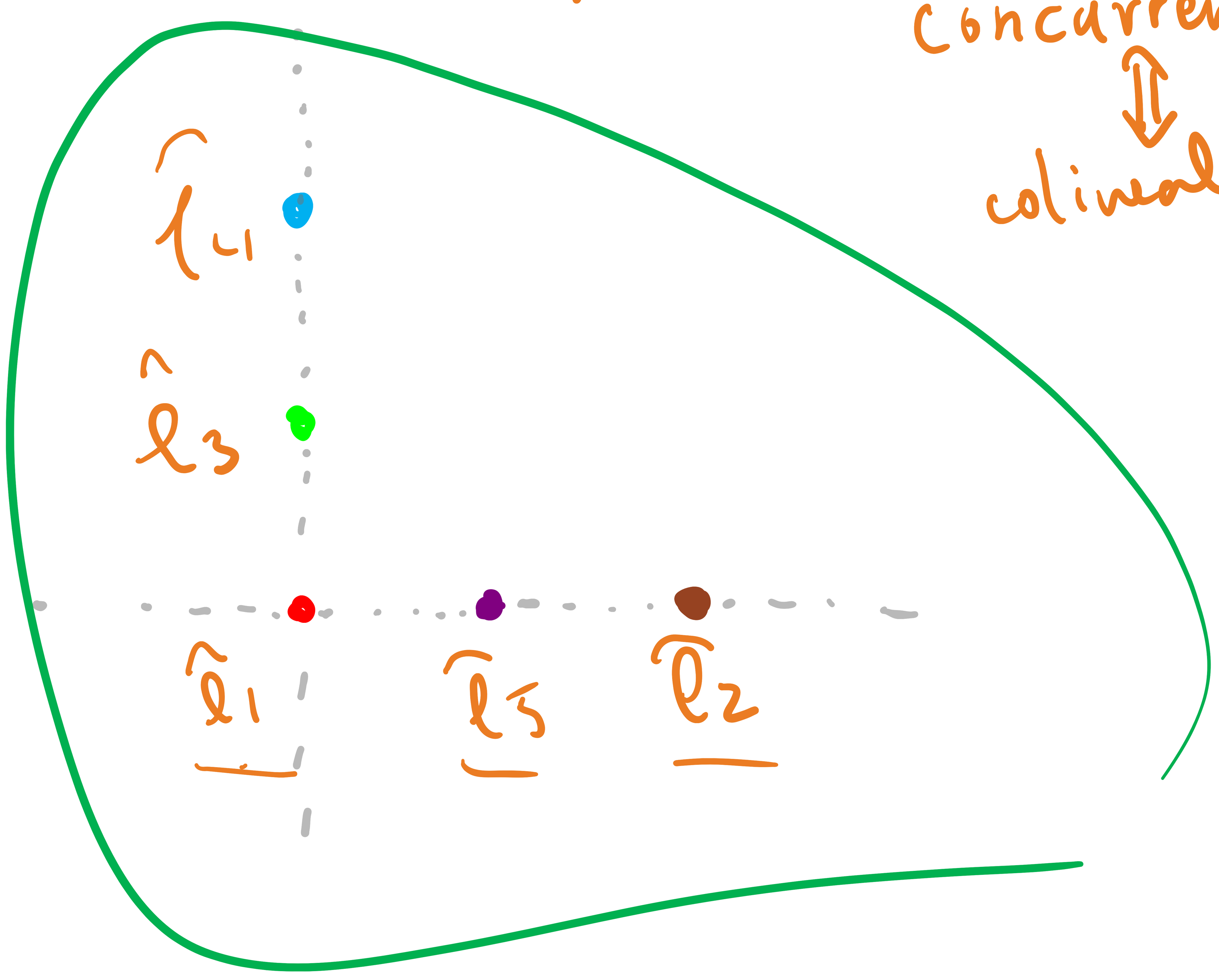
Geometría



$ax+by+cz=0 \longleftrightarrow [a;b;c]$.

$\Updownarrow$ dualidad.

concurrencias $\Updownarrow$ colinealidad



Combinatoria

¿Cómo se intersectan las rectas? ¿Qué rectas pasan por puntos triples, cuadruples, etc.?

puntos $\{\ell_1, \ell_2, \ell_4\}$, $\{\ell_2, \ell_3\}$, $\{\ell_2, \ell_4\}$ rectas
$\{\ell_1, \ell_2, \ell_5\}, \ldots$

rectas $\ell_1 \quad \ell_2 \ . \quad \ell_5 .$ puntos

¿Qué puntos son colineales? ¿Qué subconjuntos definen rectas con dos, tres, … puntos?

(En el caso real hay un extra de orientación que discutiremos después)

Nota: Usaremos puntos para hablar del esp. afín sin problema ($\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{C}^2$.)

¿Cómo capturar la combinatoria?

Puntos $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{C}^2$.

matriz $A = [\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_n] \in \mathbb{R}^{2\times n}$ ó $\mathbb{C}^{2\times n}$.

Observación: v_i, v_j, v_j son colineales si y solo si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{bmatrix}$$

& menores de 3×3 que sean 0.

Inmersión de Plücker:

$$Gr(\mathbb{K}^n, 3) \xhookrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$$

$$\| $$

$$Mat(\mathbb{K}, \overset{\text{rango 3}}{3\times n}) / \text{equivalencia por filas.}$$

$$\left\{ [\overbrace{u_1, \dots, u_n}^{\mathbb{R}^3 / \mathbb{C}^3}] \right\} \longmapsto \overbrace{\left(\det(u_i \ u_j \ u_k) \right)_{\{i,j,k\} \subseteq \{1,\dots,n\}}}^{\text{coordenadas en orden lexicográfico.}}$$

La imágen de este mapa es una inmersión que realiza la Grassmaniana como variedad proyectiva.

Combinatoria del arreglo:

thin schubert cells.

$$[v_1, \dots, v_n] \longmapsto \underbrace{\varphi\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}\right\}\right)}_{\text{los ceros de este vector codifican la combinatoria.}} \in \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$$

Tenemos: $\mathbb{R}^{2\times n} \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$ coordenadas iguales

$\mathbb{C}^{2\times n} \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$

a 0 determinan la combinatoria (matroide) de la configuración.

$\mathbb{R}^{2\times n} \xrightarrow{Ax+\vec{b}} \mathbb{R}^{2\times n}$

Isomorfismos afines de $\mathbb{R}^2$ no cambian la combinatoria. (fijar 3 puntos no colineales).

En $\mathbb{C}$, dada una colección $\mathcal{B} \subseteq \binom{\{1,\dots,n\}}{3}$ de coordenadas que se anulan.

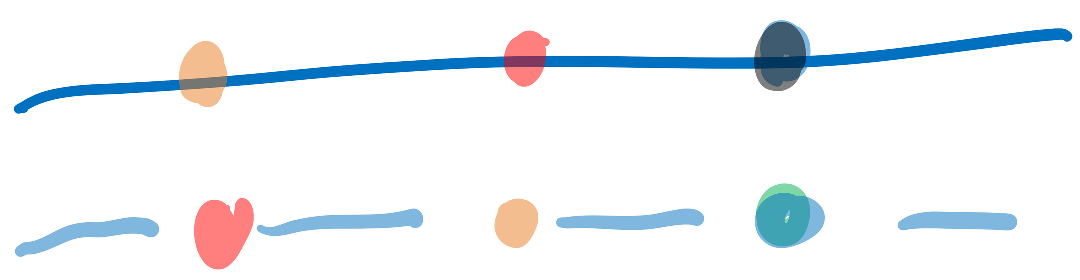
← son los 0's del mapa

$$R(\mathcal{B}, \{i,j,k\}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Psi\left(\begin{bmatrix} 1' \\ A \end{bmatrix}\right) \text{ tiene entradas } 0 \text{ exactamente en } \mathcal{B} \text{ y} \\ A|_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$\{i,j,k\} \notin \mathcal{B}$

Se puede pensar como subespacio de $\mathbb{C}^{2\times n}$, $Gr(\mathbb{C}^n, 3)$, $\mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$ (Más detalles otro día)

- variedad afín.
- thin Schubert cell.

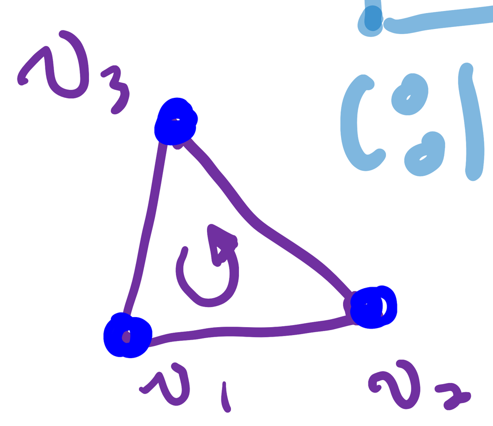


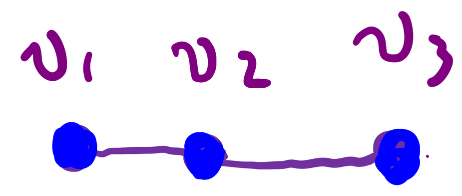
Sobre $\mathbb{R}$ hay información más fina.

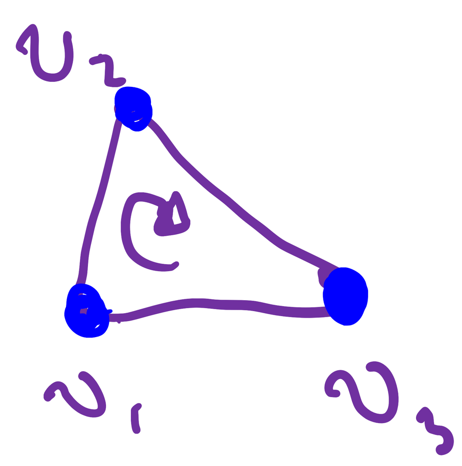
$\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \longrightarrow \{-,0,+\}$.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \begin{cases} >0 \\ 0 \\ <0 \end{cases}$$



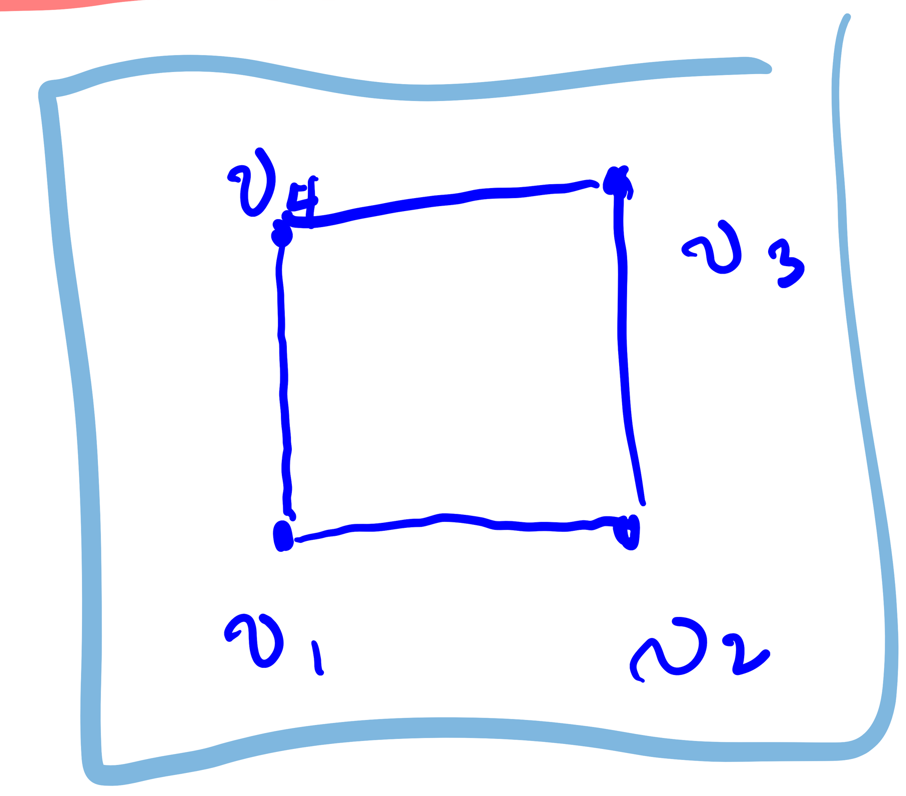




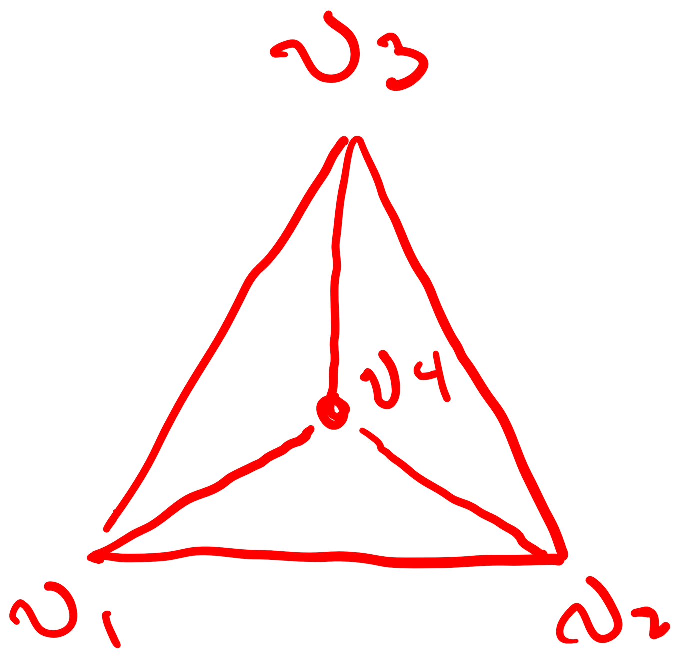
Si adicionalmente tenemos en cuenta estos signos, hay mas informacion:

Ejemplos:

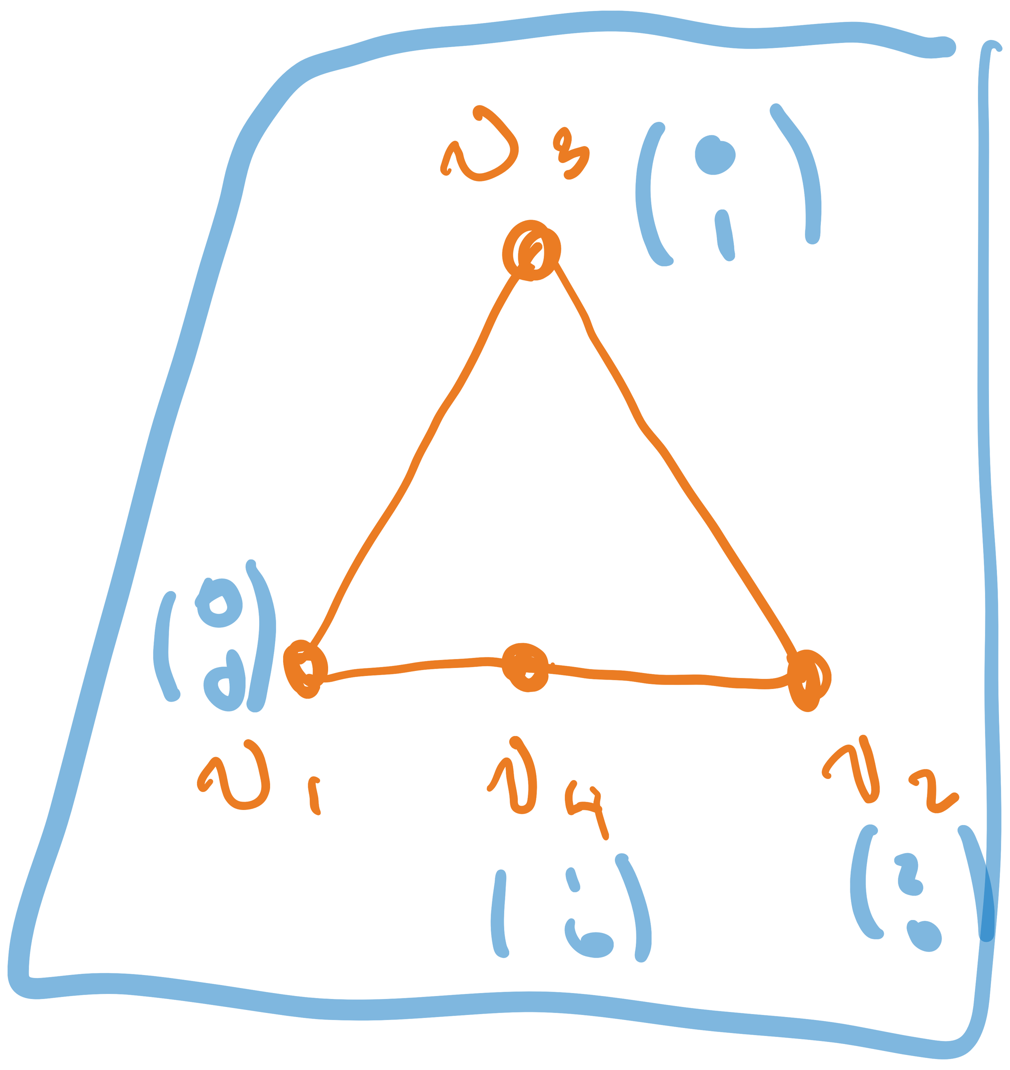
(a)



signos:	123	124	134	234
	+	+	+	+



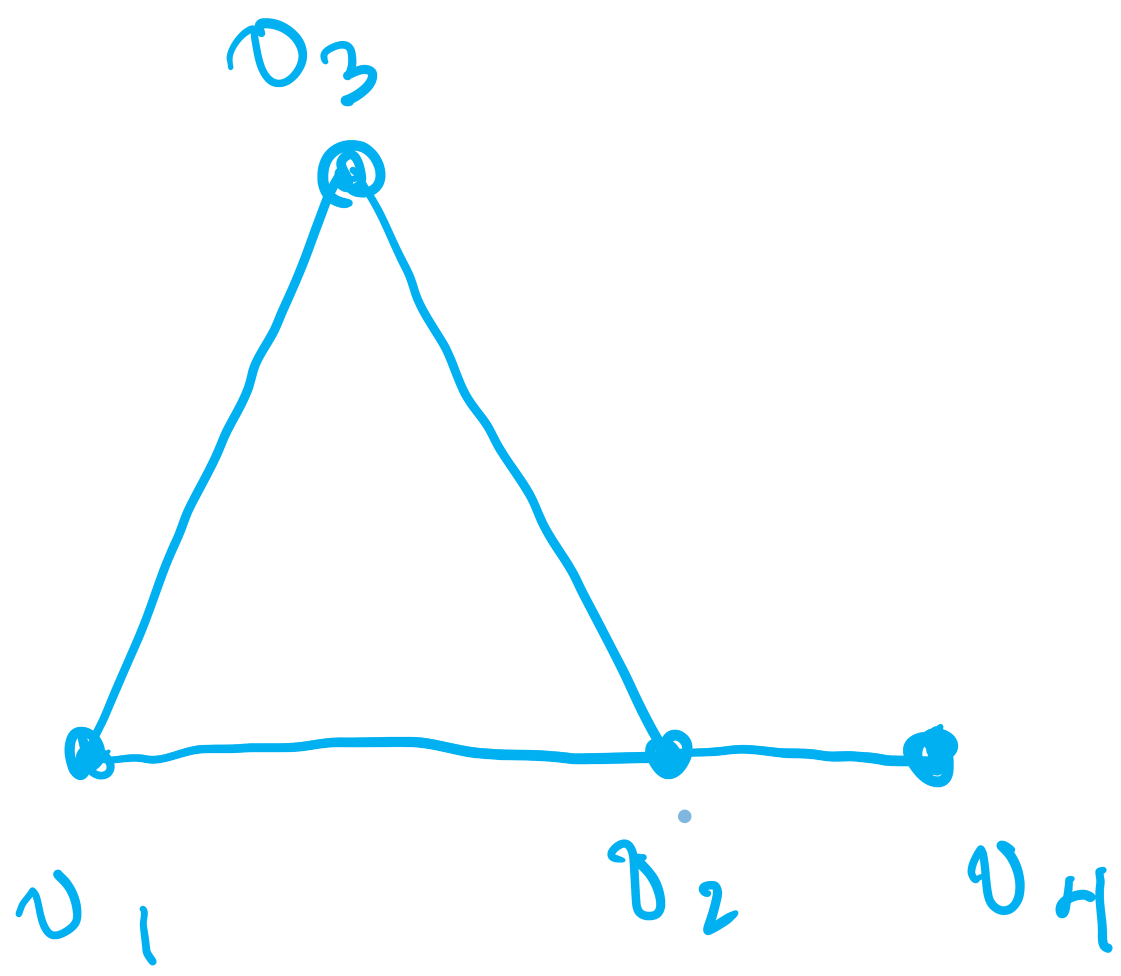
$+ \quad + \quad - \quad +$



$+ \quad 0 \quad - \quad +$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b (1 1 1 1



$+ \quad 0 \quad - \quad -$

⋮

Chirotope.

$$\chi_\Delta : \binom{[n]}{3} \longrightarrow \{-,0,+\}. \qquad P^{\binom{n}{3}-1}$$

$$\{i,j,k\} \xmapsto{\chi_\Delta} \mathrm{sgn}\left(\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ v_i & v_j & v_k\end{pmatrix}\right)$$

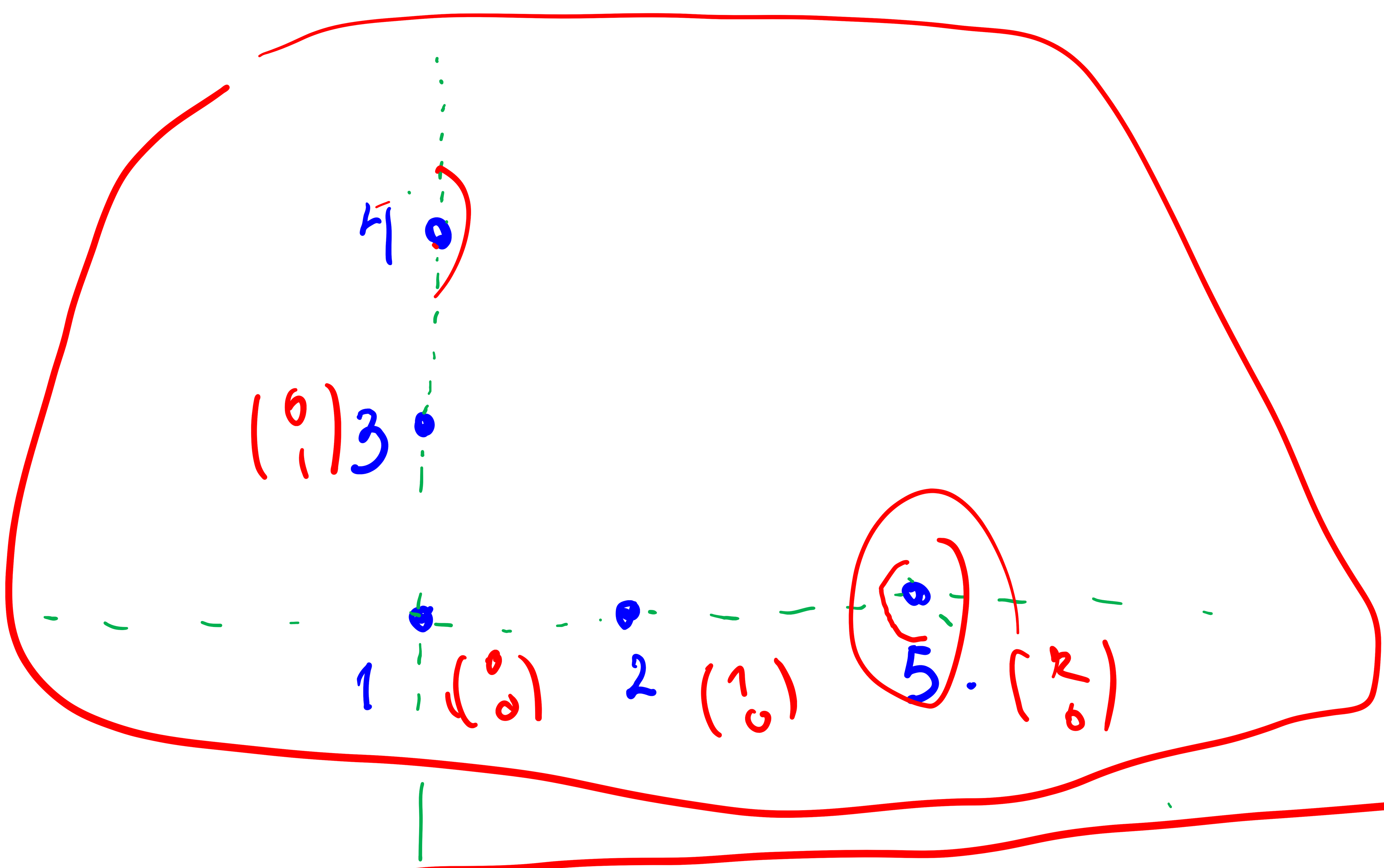
$i<j<k.$

información combinatoria refinada } matroide orientada.

Dado un chirotope χ. $\{i<j<k\}$ $\chi(\{i,j,k\})=+.$

$$R(\chi,\{i,j,k\}) = \left\{ \underline{A} \in \mathbb{R}^{2\times n} \;\middle|\; A_{\{i,j,k\}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \underbrace{\chi_A = \chi}_{\text{combinatoria fija}}. \right\}$$

Ejemplo:



χ, chirotope de este arreglo.

tiene $\binom{5}{3} = 10$ signos.

$123 = \{1,2,3\}.$

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
+	+	0	0	−	−	−	−	−	−

En $\mathcal{R}(\chi, \{1,2,3\})$ tenemos matrices.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cancel{x_1} & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & \cancel{y_2} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{sgn}(125) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$\mathrm{sgn}(134) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

redundante

$\mathrm{sgn}(124) = + \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} > 0. \Leftrightarrow x_2 > 0$

$\mathrm{sgn}(135) = - \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow y_1 > 0.$

$\mathrm{sgn}(235) = - \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow 1 - y_1 < 0$
$y_1 > 1$

$\mathrm{sgn}(234) = - \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow x_2 > 1$

$$\mathcal{R}(\chi, \{1,2,3\}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x > 1 \\ y > 1 \end{matrix} \right\}.$$

dos. ceros extra.

$$\cong \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

¿Porque hay redundancias?

Los determinantes viven en la Grassmanniana y satisfacen varios polinomios.

Conjuntos semialgebraicos:

$$\underbrace{f_1, \dots, f_r}_{F}, \underbrace{g_1, \dots, g_s}_{G}, \underbrace{h_1, \dots, h_t}_{H} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

$$\Omega = (F, G, H)$$

$$V(\Omega) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} f_i(z) = 0 & \forall i = 1, \dots, r \\ g_i(z) < 0 & \forall i = 1, \dots, s \\ \boxed{h_i(z) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, t} & \end{array} \right\}$$

Ej:

$\rightsquigarrow$ conjunto semialgebraico asociado a Ω.

V es primario si $t = 0$.

Observación: Para todo chirotope χ $R(\chi, \{i, j, k\})$ es semialgebraico primario.

$$\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_i & v_j & v_k \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cuádrica en } F.$$

$$\operatorname{sgn} \left\{ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_i & v_j & v_k \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \quad \text{cuádrica en } G.$$

Pregunta:

¿Qué tipo de conjuntos semialgebraicos primarios se pueden construir como espacios de realizaciones?

Teorema de Universalidad de Mnëv

La respuesta es todos si miramos conjuntos semialgebraicos primarios modulo "equivalencia estable".

Antes de hablar de equivalencia estable, un poco de intuición(?) en términos familiares.

En particular:

Equivalencia estable ⇒ equivalencia homotópica.

Mnëv débil: ∀ conjunto semialgebraico primario hay un espacio de realización homotópicamente equivalente.

Muchos espacios admiten realizaciones semi-algebraicas:

Ej: (1) Cualquier variedad real.

(2) Cualquier complejo simplicial finito:

(a) Variedades triangulables compactas.
- complejas suaves
- reales suaves.
- variedades PL.

(b) Complejos CW-regulares.

- Arreglos realizables en $\mathbb{R}$ y no en ext. algebraicas de $\mathbb{Q}$.
- Singularidades raras
- Medida de complejidad de un arreglo. ($\rightsquigarrow$ resultados sobre complejidad de geografías.)
- Computacionales