El teorema de universalidad de Mnev (parte II)

Configuración de puntos $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ $\rightsquigarrow$ $R(\mathcal{B}, \{i,j,k\})$

$\{i,j,k\}$ p_i, p_j, p_k forman triángulo.

$\mathcal{B}$ combinatoria.

$$R(\mathcal{B}, \{i,j,k\}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{determinantes} \\ =0, >0, <0 \end{array} \right\}$$

básicos

Conjunto semialgebraico básico.

$$\Omega = \{(f_1, \dots, f_r), (g_1, \dots, g_s)\} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n].$$

$$V(\Omega) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} f_i(z) = 0 & i = 1, \dots, r \\ g_i(z) < 0 & i = 1, \dots, s \end{array} \right\}$$

$R(\mathcal{B}, \{i,j,k\})$ es semi-algebraico básico.

En la prueba de Mnëv se puede hacer algo un poco más general con familias de conjuntos semialgebraicos.

Definición: Una familia en $\mathbb{R}^n$ es una tupla ordenada $(V_1, \dots, V_m)$ donde $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto semi-algebraico básico, y $V_i \cap V_j = \emptyset$.

Ahora necesitamos una noción de equivalencia de familias.

Proyecciones estables:

$\mathcal{W}=(W_1,\dots,W_k)$ familia en $\mathbb{R}^{n+d}$, $\mathcal{V}=(V_1,\dots,V_k)$ familia en $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{V}$ es una proyección estable de $\mathcal{W}$ si se cumple lo siguiente:

1. Si $\pi: \mathbb{R}^{n+d} \to \mathbb{R}^n$ es la proyección en las primeras n coordenadas,

$$\pi(W_i) = V_i \qquad W_i \simeq V_i$$

2. Existen $\psi_1,\dots,\psi_s, \Phi_1,\dots,\Phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ polinomiales, tales que

$$W_i = \{ (v, v') \mid v \in V_i,\ \underbrace{\psi_i(v)\cdot v' = 0,\ \Phi_1(v)\cdot v' < 0}_{\text{polihedro relativamente abierto}} \}$$

$v \in \mathbb{R}^n$, $v' \in \mathbb{R}^d$.

Lema: Si $\mathcal{W}$ se proyecta establemente a $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $W_i \sim V_i$ equivalencia homotópica.

Idea: las fibras de $\pi: W_i \to V_i$ son convexas y existe $\boxed{f: V_i \to W_i}$ t.q. $\pi \circ f = \mathrm{id}_{V_i}$.

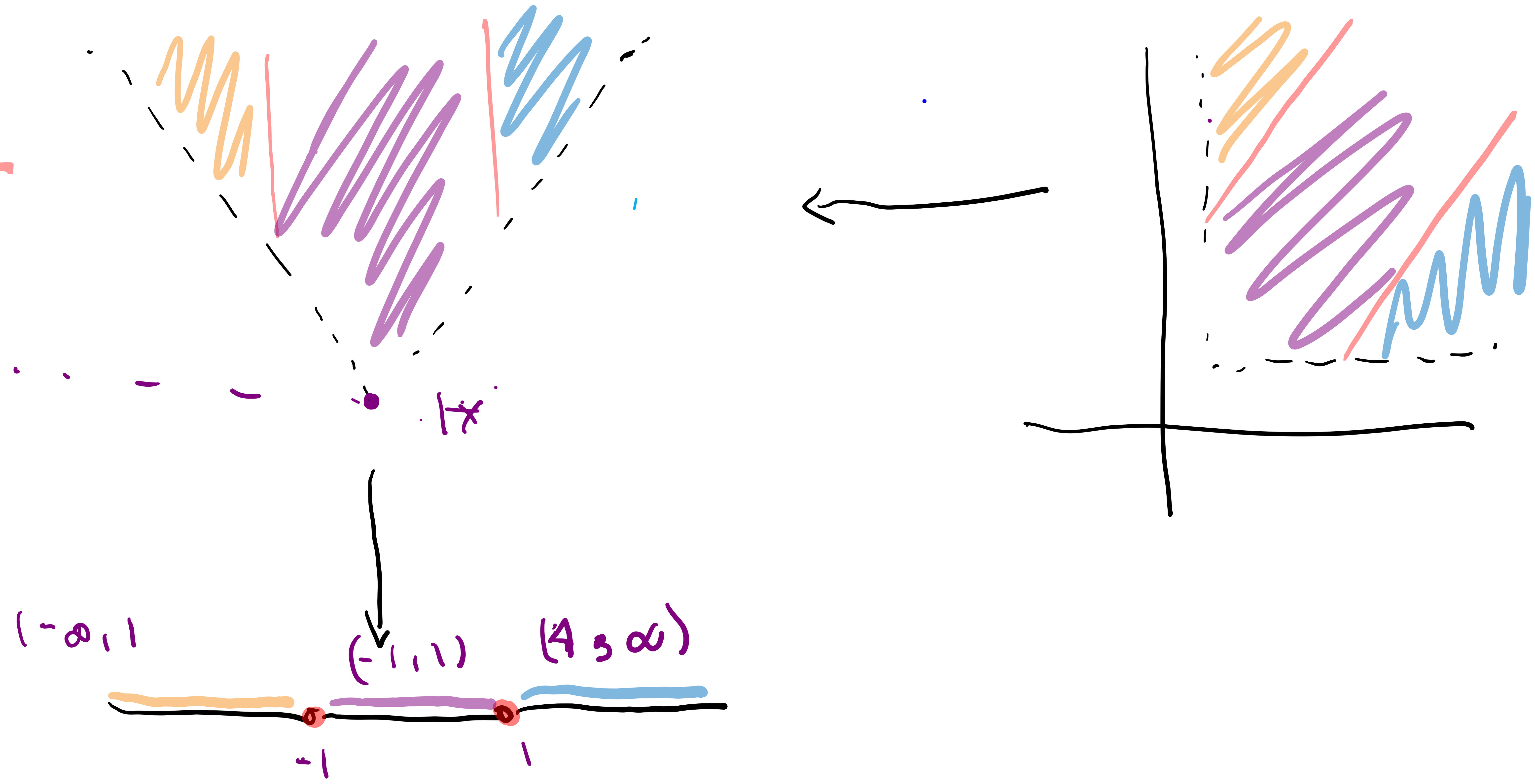
Definicion: $\mathcal{W}=(W_1,\dots,W_k)$, $\mathcal{V}=(V_1,\dots,V_k)$ son racionalmente equivalentes si existe homeomorfismo

$$f: \bigcup_{i=1}^k W_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^k V_i$$

$$f(W_i) = V_i$$

f, f^{-1} funciones racionales.

Ej:

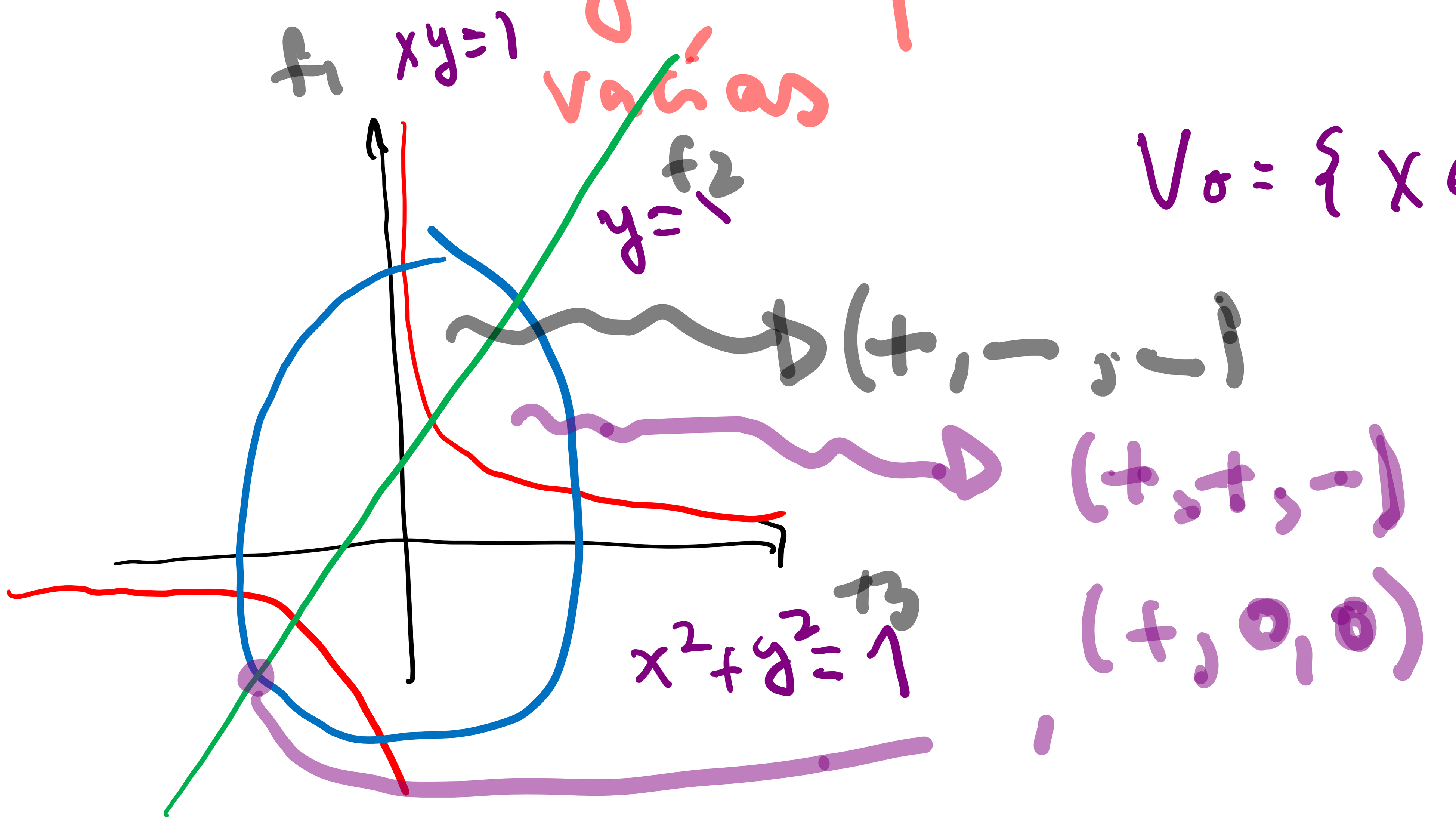


Equivalencia estable

~ relación de equivalencia en familias generada por equivalencias racionales y proyecciones estables.

Dados $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, tenemos una partición $(V_\sigma)_{\sigma \in \{0,+,-\}^k} \subseteq \mathbb{R}^n$. ⟶ ponemos signos "posibles".

⟶ algunos pueden ser vacías



$V_\sigma = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid sgn(f_i(x)) = \sigma_i \}$

Teorema de universalidad de particiones

Dada una partición $\boxed{(V_\sigma)_{\sigma \in \{0,+,-\}^k}}$

existen chirotopes χ_σ tales que

$(V_\sigma) \sim \boxed{(R(\chi_\sigma, B_\sigma))}$ $\quad V_\sigma \sim R(\chi_\sigma, B_\sigma)$

Universalidad clásica:

Para todo semi-algebraico V existe un chirotope χ t.q.

$$V \sim R(\chi, B).$$

Y cómo probar algo así?

Dos pasos:

(i) Cambiar la partición por una familia con equaciones "fáciles" (usualmente en otra dimensión).

(ii) Usar las equaciones fáciles para contruir arreglos

① Codificar polinomios en sistemas de ecuaciones.

Lema: Si $\boxed{f} \in \mathbb{N}[x_1,\dots,x_n]$ existe $m > n$, y los siguientes datos:

con algunos 0's o 1's.

- Variables $x_{n+1},\dots,x_m$
- Una coleccion de ecuaciones de la forma $\boxed{x_i + x_j = x_k}$ (Tipo S)
- Una colección de ecuaciones de la forma $\boxed{x_i x_j = x_k}$ (Tipo M)

Que satisfacen: si $z_1,\dots,z_n \in (1,\infty)$ existen únicos $\boxed{z_{n+1},\dots,z_m} \in (1,\infty)$ que satisfacen las ecuaciones. y de modo que

$$f(z_1,\dots,z_n) = z_m.$$

Evaluar un polinomio es solucionar un sistema "sencillo".

reescribir con elementales variables. operaciones $+,\cdot$ en y 1.

Ej: $p = x_1^3 + x_1x_2 + 3x_2$

$$= \Big(\big(((x_1\cdot x_1)\,x_1) + (x_1\cdot x_2) \big) + \big(((1+1)+1)\cdot x_2 \big) \Big)$$

en cada parentesis tiene una operacion.

Una variable nueva por parentesis.

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}.$

Ecuaciones son parentesis.

$x_3 = x_1 \cdot x_1$

$x_4 = x_3 \cdot x_1$

$x_5 = x_1 \cdot x_2$

$x_6 = x_4 + x_5$.

$x_7 = 1 + 1$.

$x_8 = x_7 + 1$

$x_9 = x_8 \cdot x_2$

$x_{10} = x_6 + x_9$.

Evaluar p en $(1,\infty)^2$ es igual que solucionar las ecuaciones de la izquierda

Usando la construcción de arriba se pueden hacer varias transformaciones para simplificar las ecuaciones que definen una partición.

Lema: Sean $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $(V_\sigma)_{\sigma \in \{0,+,-\}^k}$ la partición asociada.
Consideremos $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

$\hat{f}_i(x,y) = f_i(x-y)$.

W_σ celda de $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k \cap (1,\infty)^{2k}$.

y $(W_\sigma)_{\sigma \in \{0,+,-\}^k}$ la partición de $(1,\infty)^{2n}$ inducida por $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k$.

$(V_\sigma) \sim (W_\sigma)$

equiv. estable.

---

i.e. Basta considerar particiones de $(1,\infty)^n$.

Para transformar en líneas, queremos tener dos tipos de polinomios definiendo el conjunto semi-algebraico. Ahora las definimos.

Pensar en seis puntos en una línea.

$$q : \mathbb{R}^6 \dashrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b,c,d,e,f) \longmapsto \frac{(a-d)(c-f)(e-b)}{(a-f)(c-b)(e-d)}$$

∞, ∞

podemos reemplazar $e,f \to \infty$ y sacar límite sin problemas.

Decidir si dos números suman / multiplican otro se puede hacer en términos de q:

$$\begin{cases} x+y=z \iff \boxed{q(x,y,0,z,\infty,\infty)=1} \\ xy=z \iff \boxed{q(x,y,1,z,\infty,0)=1} \end{cases}$$

Cambio que parece inocuo, pero q tiene interpretación geométrica.

El lema principal es:

Lema:

Si $V=(V_\sigma)_{\sigma\in\{0,+,-\}^m}$ es una partición de $(1,\infty)^n$, entonces existen K, N enteros y una familia

\# de polinomios que definen a V

$W\subseteq\mathbb{R}^n$.

$$W=\left(\{y\in\mathbb{R}^N \mid 1<y_1<\dots<y_N,\ \boxed{q_i(y)=1}\ i=1,\dots,K,\ \boxed{\operatorname{sgn}(\bar{q}_j(y)-1)=\sigma_j},\ j=1,\dots,m\}\right)_{\sigma\in\{0,+,-\}^k}$$

$q_i \rightsquigarrow$ escoger 6 variables

$\bar{q}_j \rightsquigarrow$ ordenadas en $\{0,1,\infty,y_1,\dots,y_N\}$.

tal que $W\sim V$.

¿Cómo se hace esto?

Si $f_1, \dots, f_m$ definen V.

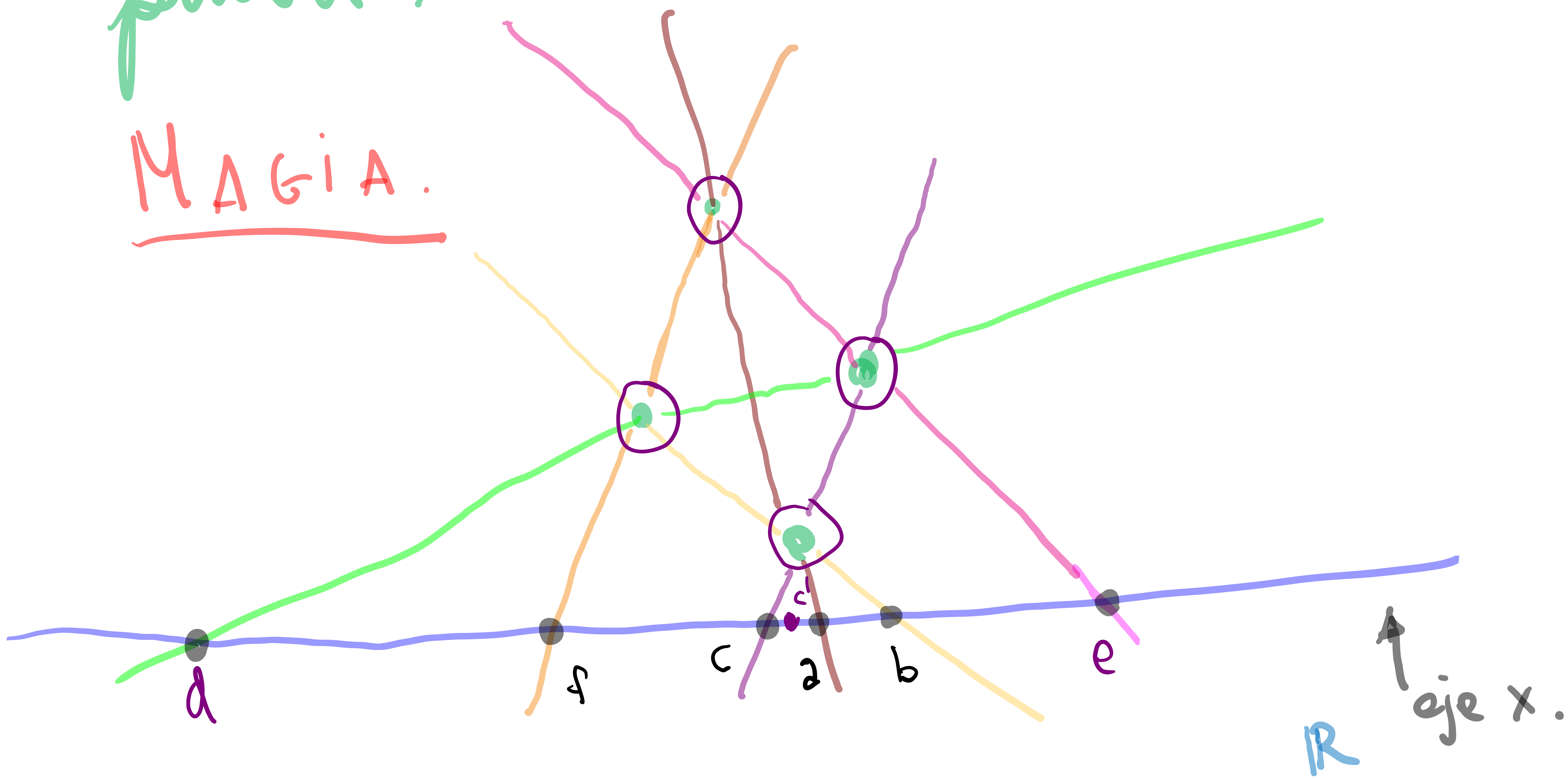
$f_i = f_i^+ - f_i^-$ $\mathbb{N}[x_1, \dots, x_n]$.

jugar con lema para evaluar f_i^+, f_i^-

Ahora falta pasar de W a un arreglo de puntos.

MAGIA.

$\mathbb{R}^2$



$(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}$ vienen de un cuadrilatero si y solo si $\boxed{q(a,b,c,d,e,f) = 1}$

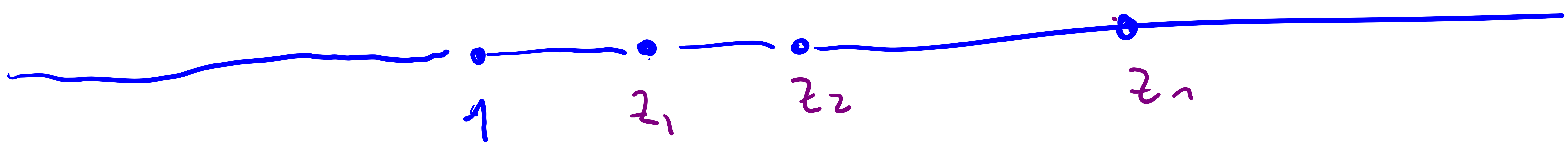
Para w_i

$1 < y_1 < y_2 \dots < y_n$

q_i

$\bar{q}_i$

o $q(y_1, y_2, \dots y_6) = 1$



La combinatoria de todo arreglo es únicamente determinada por todos sus cuadriláteros.