$C^{M_{K^2,\chi}}$

Mnëv-3

6 - Abril - 21

Ley de Murphy

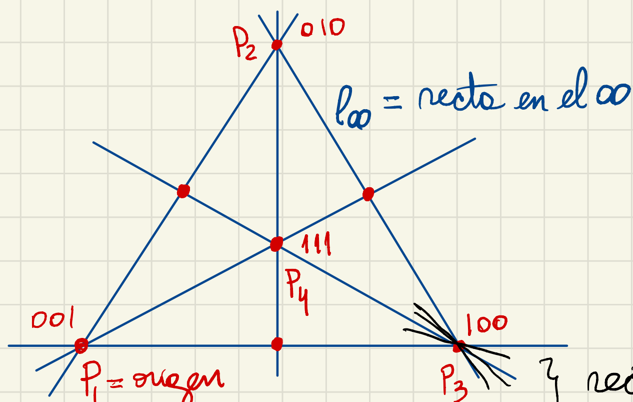
Artículos base de la charla:

"Murphy's law in algebraic geometry: Badly-behaved deformation spaces"
Ravi Vakil, Invent. Math. 164 (2006), 569–590.

"Mnëv-Sturmfels universality for schemes"
S.H. Lee y Ravi Vakil, Clay Math. Proc. 18 (2013), 457–468.

La construcción de una configuración de rectas dada una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada.

(1) puntos y rectas anclas



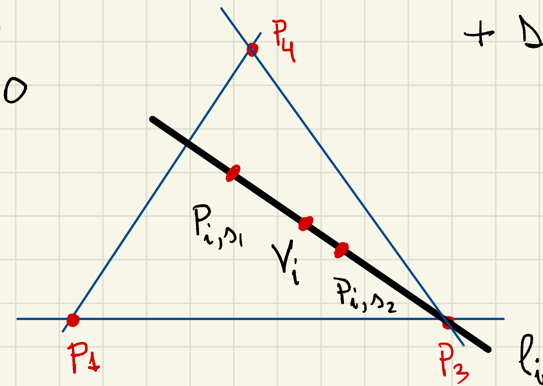
} rectas horizontales

Toda configuración de puntos y rectas contiene las anclas.

(2) Rectas variables

$l_i : y - y_i z = 0$

$(y_i \neq 0, 1)$



+ Decoración $Fr_i \subset \{-1, 0, 1\}$

$\qquad\qquad\quad \| $

$\qquad\quad \{s_1, s_2\}$

$P_{i,s_j} = [y_{i,s_j}, y_i, 1]$

$V_i = [\overline{X}_i, y_i, 1]$

Tal que tenemos isomorfismo $l_i \longrightarrow \mathbb{P}^1$

$P_3 \longmapsto \infty$

$P_{i,s_j} \longmapsto s_j$

$V_i \longmapsto x_i$ la coordenada de V_i

[De esta forma, si elegimos $y_{i,s_j} = s_j \Rightarrow \overline{X}_i = X_i$]

Al final del día, y_i, y_{i,s_j} variables libres y x_j variables comprometidas con el álgebra.

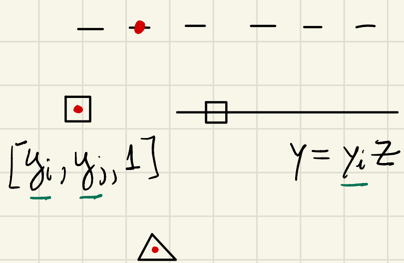
Una guía clave será la razón cruzada de 4 puntos en $\mathbb{P}^1$:

$$(a,b;c,d) = \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{d-c}{d-b}$$

Donde $[a:1] = a$ si $a \neq \infty$ o $[1,0] = \infty$.

Luego, $(a,b;c,\infty) = \dfrac{a-b}{a-c}$ y $(0,x_i;1,\infty) = x_i$.

(3) Notación: en lo que sigue



Punto y recta ya construida.

Punto y recta horizontal libremente elegidas

meta

(4) Construcciones atómicas: Tendremos 4 configuraciones de rectas que se aplicarán para imponer

$x_a = x_b$ $\quad$ $x_a = -x_b$ $\quad$ $x_c = x_a + x_b$ $\quad$ $x_c = x_a x_b$

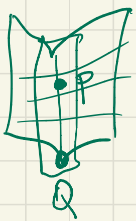
geography of lines comment

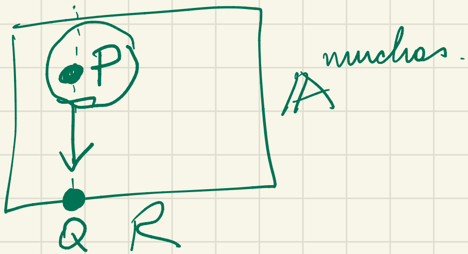
La idea, como ya fue explicado, es:

DADA $\mathbb{Z}$-alg f.g. $\rightsquigarrow$ SE EXTRAE LA RECETA

$$\frac{\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]}{(x_1x_2+x_3^2-2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}]}{(x_4-x_1x_2,\ x_5-x_3,\ x_6-x_3x_5,\ x_7-x_4-x_6,\ x_8-1,\ x_9-1,\ x_{10}-x_8-x_9,\ x_7-x_{10})} = R$$

$\rightsquigarrow$ a lo más 2 anteriores





$$R \xrightarrow{\text{proyector}} R[y_1, y_2, \dots, y_{\text{muchos}}]$$

tal que exista abierto en la correspondiente variedad (e.g. varios y_i generales) y punto $P=[q_1,\dots,q_{10}, p_1,\dots,p_{\text{muchos}}]$ que proyecte a $Q=[q_1,\dots,q_{10}]$, para cualquier punto Q en la variedad definida por R (ie, en $x_1x_2+x_3^2-2=0$).

$P \longleftrightarrow$ configuración de rectas particular

Un R que me gusta:

$$\frac{\mathbb{Z}[x_1]}{(x_1^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]}{(x_2 - x_1, x_3 - x_2 x_1, x_3)}$$

Pero ya esa configuración tiene muchas rectas! La conexión interesante es la construcción de una superficie de tipo general $S \in M_{K^2, \chi}$ (para algún $(K_S^2, \chi(\mathcal{O}_S))$ calculables a partir de la config.):

(1) $\pi_1(S)$ trivial
(2) K_S muy amplio
(3) $\rho(S) = 2$
(4) $\mathrm{Aut}(S)$ trivial

$\Rightarrow M_{K^2,\chi}$ tiene una componente no reducida.
(No es un punto gordo! en esta construcción se pierde la dimensión)

Usando esta construcción general de Mnëv, Vakil muestra que dado un tal $R = \dfrac{\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots, f_r)}$, existirá una tal superficie S tal que el espacio de moduli alrededor de S es isomorfo a un "abierto" de $R[y_1, \ldots, y_{\text{mucho}}]$ alrededor de un punto.

Ley de Murphy: "Si algo puede salir mal, entonces saldrá mal".

Ley de Murphy de Vakil para un espacio de Moduli M: Toda singularidad (salvo proyección) de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$ aparece en M.

__Teorema__ (Vakil 2006) Un montón de espacios de moduli satisfacen la ley de Murphy. (eg. superficies como arriba, n-folds $n \geq 2$, varios esquemas de Hilbert (eg. curvas no sing. en espacio proy fijo, superficies no sing en $\mathbb{P}^5$), etc.)

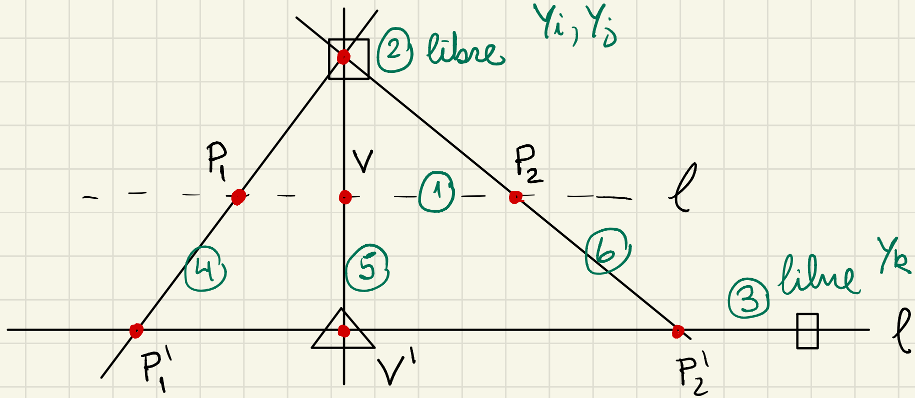
Consecuencias $\longrightarrow$ En general, en geometría algebraica debemos esperar que los parámetros que describen objetos son horribles, y tan horribles como queramos.

$\downarrow$

A partir de dimensión 2, no hay esperanza en desingularizar agregando más estructura los espacios de moduli ya que sería en esencia desingularizar toda sing. sobre $\mathbb{Q}$.

¡ regresar a la construcción de la configuración! Los 4 construcciones atómicos:

I (Movimiento paralelo)



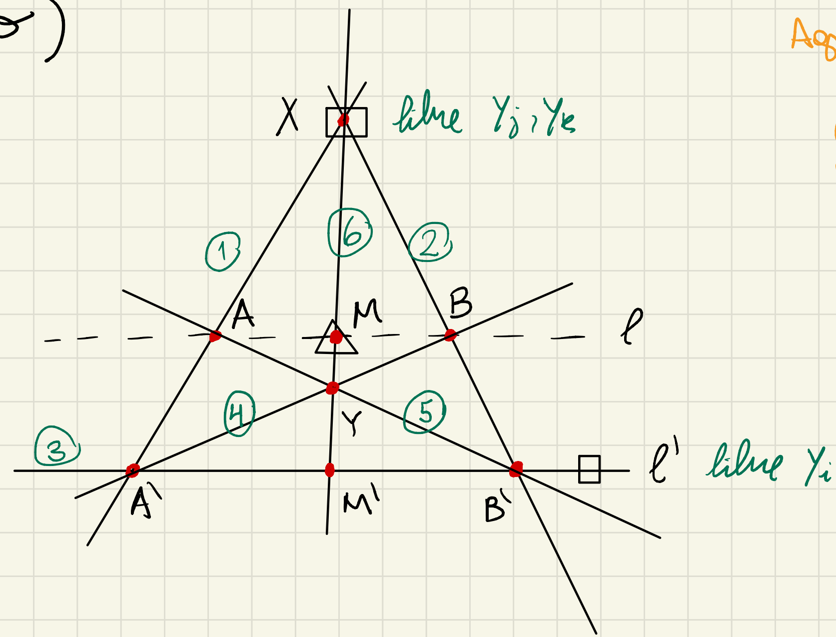
Agrega:
4 rectas
1 pto triple
varios dobles.
pto ∞ crece en 1

$$\therefore \quad (P_1, V; P_2, \infty) = (P_1', V'; P_2', \infty) \Rightarrow$$ V y V' con igual coordenada

(se asigna misma decoración)

II (Punto medio)

Agrega:
6 rectas
6 ptos triples
varios dobles
∞ crece en 1



$$\underline{(A, M; B, \infty)} \underset{\text{por } X}{=} (A', M'; B', \infty) \underset{\text{por } Y}{=} (B, M; A, \infty)$$

$$\frac{A-M}{A-B} = \frac{B-M}{B-A}$$

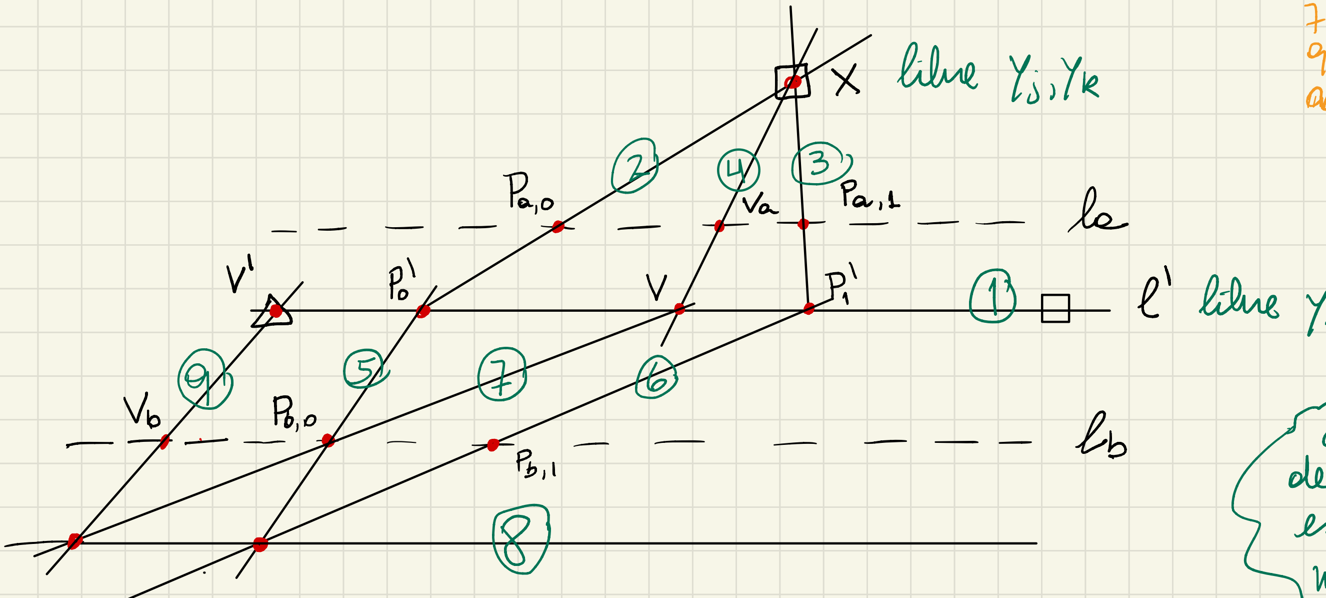
$[A, 1]$
$[B, 1]$
$[M, 1]$

$$\Rightarrow A - M = M - B$$

$$\underline{M = \frac{A+B}{2}}.$$

III (suma genérica) Tenemos $x_a, x_b, x_a + x_b \neq 0, 1$ y así la decoración de las rectas l_a, l_b se asumen $\{0,1\}$.

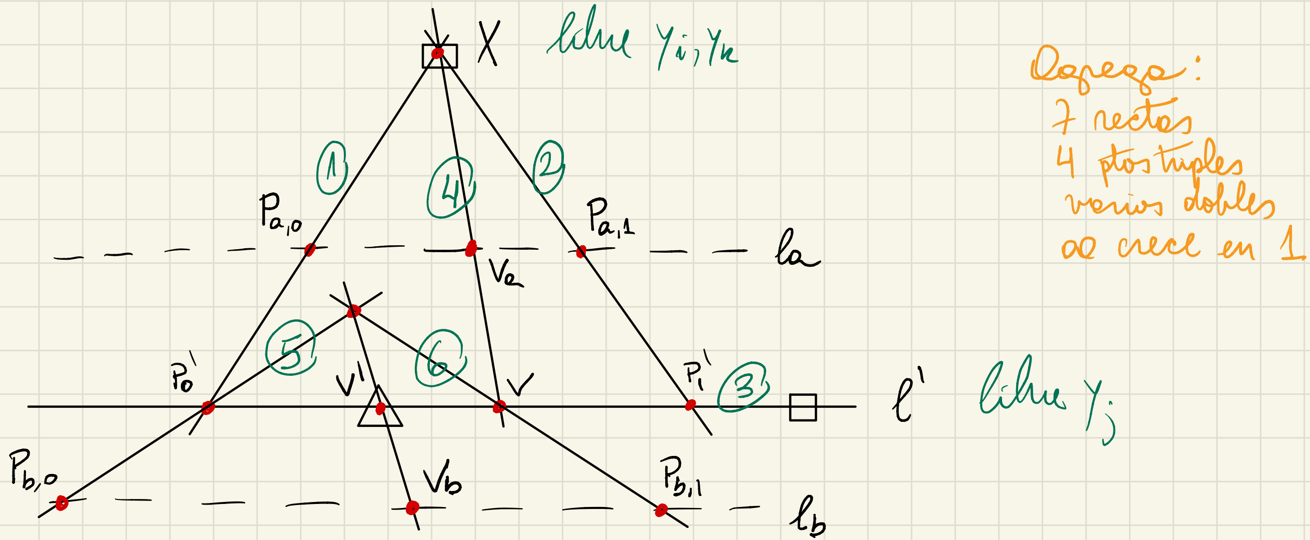
Despego:
7 ptos triple
9 rectas
∞ crece en 2



El resto de las rectas están determinadas

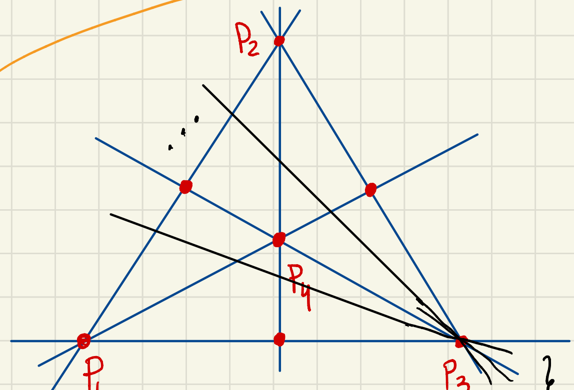
Se obtiene l' con decoración $\{0,1\}$ en P_0', P_1' y V' con "coordenada" $x' = x_a + x_b$.

(IV) (multiplicación genérica) x_a, x_b, $x_a x_b \neq 0,1$; decoraciones $\{0,1\}$ l_a, l_b



Se obtiene ℓ' con decoración $\{0,1\}$ en P_0', P_1' y V' con "coordenada" $x' = x_a x_b$

Todo se pone junto: tenemos punto $(q_1, \dots, q_m) = q$ donde $R = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]/(g_1, \dots, g_r)$.



Lee-Vakil lo hace en $\mathbb{F}_p$ para generalidad total. Aparece char $p=2$ como obstáculo (punto medio por e.g.)

- Se hace forzando la expresión en los x_i
- Se necesitan cambios decoración, elegir libre
- Problemas con 0, 1

En cada paso se agregan pts y rectas en posición general

...

por cada g_i (que depende de x_a, x_b, x_c) se construye la configuración que corresponde $\Longleftarrow$

} una l_{y_i} por cada x_i donde x_i es la coord, y y_i es el param libre. y elegir decoración según g_i.

[los g_i son $x_a - x_b$, $x_a + x_b$, $x_c - x_a - x_b$, $x_c - x_a x_b$]

[$\bar{c}_1^2 = 9 - 5\# + \sum_{k \geq 2} (3k-4) t_k$ $\quad \bar{c}_2 = 3 - 2d + \sum_{k \geq 2} (k-1) t_k \Rightarrow \bar{c}_1^2 / \bar{c}_2 \sim 2$.]

Pero, quizás (y fuera de Mnëv universality) podemos construir configuraciones donde su espacio de realizaciones es un punto gordo, y eso se traduce en superficie con esa propiedad.
¿Es eso calculable? ¿Qué significa geométricamente no reducido?