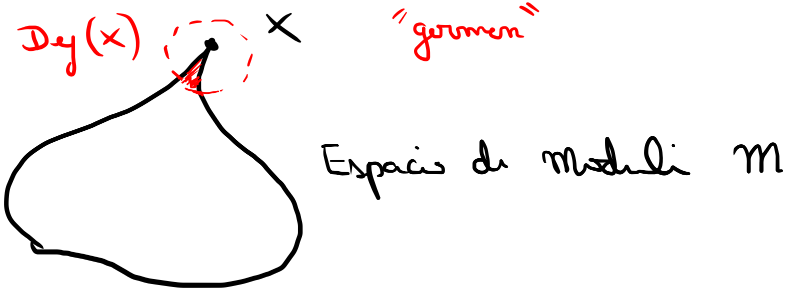
SGA 2021-1 (Semana 4): "Ley de Murphy en Geom. Algebraica II" / $\mathbb{C}$

Referencia: • Ravi VAKIL, "Murphy's law in algebraic geometry: Badly-behaved deformation spaces", Inventiones Mathematicae (2006).

§1. Un poco de terminología e historia

Sea X un objeto geométrico de interés (eg. variedad, variedad $\subseteq \mathbb{P}^N$, etc).

Espacio de deformaciones $\mathrm{Def}(X)$ $\left(\text{y } \mathrm{Def}(X \xrightarrow{f} Y)\right)$



$\downarrow$

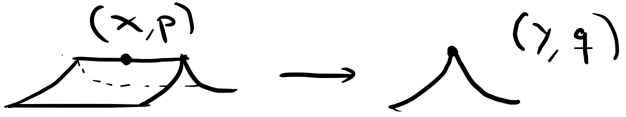
Para definiciones precisas, ver:

- Kodaira, "Complex Mfds and Deformation of Complex Structures", Chapter 4 & 5
- Manetti, "Lectures on Deformations of complex manifolds"
- Sernesi, "Deformations of Algebraic Schemes"

Kodaira: "En un comienzo, la Teoría de Deformaciones era una ciencia experimental" $\rightsquigarrow$ Pocos ejemplos

Vimos (Mnëv): Todo "tipo de singularidad" de tipo finito/$\mathbb{Z}$ aparece en un espacio de configuraciones de rectas en $\mathbb{P}^2$ } "Murphy"

$\rightsquigarrow$ "Tipo de singularidad" = "Módulo proyección"



$(x,p) \sim (y,q)$

Espacios de Moduli:

"Buenos" (cf. GIT)

Curvas $\rightsquigarrow$ M_g

$C \xrightarrow{d:1} \mathbb{P}^1$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}_{g,d}$ esp. de Hurwitz

Superficies $S \subseteq \mathbb{P}^3$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$

$\mathbb{P}^2$ $\mathcal{C}$ Curvas planas nodales $\rightsquigarrow$ "Severi" (Zariski, Harris)

Vakil: "Malos" (= Murphy ✓)

Superficies S con K_S muy amplio

Superficies $S \subseteq \mathbb{P}^4$

Haces estables (Simpson)

$\mathbb{P}^2$ $\mathcal{C}$ Curvas planas con nodos + cúspides (cf. Wahl)

¿Por qué es tan sorprendente la Ley de Murphy?

↳ "Espacios de moduli de objetos "buenos" deberían ser "buenos"" ⇝ FALSO

↳ Mumford (1962): $\exists$ Curva suave $C \subseteq \mathbb{P}^3$ con $\deg(C) = 14$, $g(C) = 24$ y $\mathrm{Def}(C \subseteq \mathbb{P}^3)$ <u>NO</u> reducido.

↳ Fantechi - Pardini, "On the Hilbert scheme of curves in higher dimensional proj. space", Manuscripta Math (1996)

↳ <u>Conj</u> (Catanese - Kodaira): S superficie de tipo general con K_S amplio y tq $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ (i.e., S regular) $\Rightarrow \mathcal{M}(S)$ "bueno"

↳ FALSO (Manetti, Vakil: Falso incluso si K_S muy amplio)

<u>Pseudo - Conj</u> (Alexeev): Moduli de superficies S es "bueno" si K_S es "apenas positivo" (barely positive)

<u>Post - Vakil</u>: Murphy para
1) Fibrados vectoriales tóricos (Payne, 2008)
2) Var de repr. de 3-variedades (Kapovich - Millson, 2017)
3) (Retracción de) $\mathrm{Hilb}^{pts}(X)$, $\dim X \geq 16$ (Jelisiejew, 2020)

§ 2. Mnëv & Blow-ups

Definimos un ESQUEMA DE INCIDENCIA (o espacio de configuraciones)

$$(\mathbb{P}^2, \{p_i\}, \{l_j\}) \in \mathcal{I} \xrightarrow[\text{cerrado}]{\text{loc}} (\mathbb{P}^2)^m \times (\check{\mathbb{P}}^2)^n$$

parametrizando $m \geq 4$ puntos marcados $p_1, \dots, p_m$ y n rectas marcadas $l_1, \dots, l_n$ verificando:

1º $p_1 = [1,0,0]$, $p_2 = [0,1,0]$, $p_3 = [0,0,1]$ y $p_4 = [1,1,1]$.

2º Para cada (p_i, l_j) especificamos si $p_i \in l_j$ ó $p_i \notin l_j$

3º Los p_i son distintos y las l_j también

4º Dadas $l_j \neq l_k$, $\exists\, p_i \in l_i \cap l_j$

5º Cada l_j contiene al menos 3 puntos marcados.

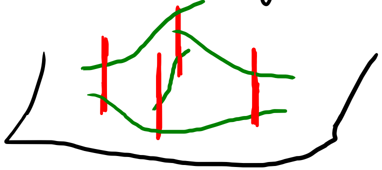
Mnëv: Dado (X,p) tipo de singularidad $\Rightarrow (X,p) \sim^{\exists} (Y,p) \xrightarrow[\text{germen}]{} \exists\, \mathcal{I}$ esquema de incidencia

↑ Fijémoslo para el resto de la charla.

Construcción:

Dada nuestro tipo de singularidad (X,p), consideramos $(\mathbb{P}^2, \{p_i\}, \{l_j\}) \in \mathcal{I}$ dado por el Teorema de Mnëv y construimos

$\mathcal{M}$ = Moduli superficies con un divisor suave marcado

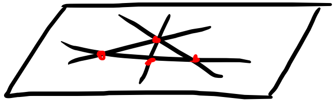


$S := Bl_{p_1,\dots,p_m}(\mathbb{P}^2)$

$\downarrow \varepsilon$

$\uparrow$

$\mathcal{I} \ni$



$\mathbb{P}^2$

y $C = E_1 \cup \dots \cup E_m \cup L_1 \cup \dots \cup L_m$

transformada estricta de $l_1 \cup \dots \cup l_m$

Prop: $\mathcal{I} \to \mathcal{M}$ es étale (i.e., suave de dim relativa 0) en $(\mathbb{P}^2, \{p_i\}, \{l_j\}) \mapsto (S,C)$

En part, $(X,p) \sim (\mathcal{M}, [(S,C)])$

↳ **Idea**: Dada (S,C) vista como germen en $\mathcal{M}$ (i.e., familia $(\mathcal{S},\mathcal{C})$) se construye un germen en $\mathcal{I}$ usando el Teo. de Castelnuovo en familia

↳ OK si $h^1(S,\mathcal{O}_S) = h^2(S,\mathcal{O}_S) = 0$ (Kodaira 1963, Wahl 1976)

§3. Revestimientos (= cubrimientos) abelianos (Catanese, Pardini, Fantechi, Manetti, etc)

Objetivo: Construir $\tilde{S}$ con $K_{\tilde{S}}$ amplio a partir de (S, C):

Sea $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ con $p = 2$ ó 3 (Obs: En $\mathbb{C}$, bastará $p = 2$)

$\rightsquigarrow G^\vee := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ grupo de caracteres

Tenemos
$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : G \times G^\vee &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \langle \xi = e^{2\pi i/p} \rangle \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times \\ (\sigma, \chi) &\longmapsto \chi(\sigma) \end{aligned}$$
el cual extendemos a $\langle \cdot, \cdot \rangle : G \times G^\vee \to \mathbb{Z}$ imponiendo $\langle \sigma, \chi \rangle \in \{0, \dots, p-1\}$

Dados $D : G \to \mathrm{Div}(S)$, $\sigma \mapsto D_\sigma$ y $L : G^\vee \to \mathrm{Pic}(S)$, $\chi \mapsto L_\chi$,
decimos que (D, L) verifica la CONDICIÓN DE REVESTIMIENTO si:

i) $D_0 = 0$

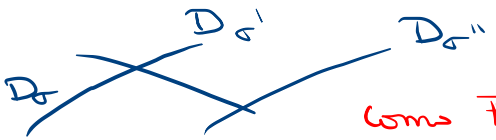
ii) $p L_\chi = \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma, \chi \rangle D_\sigma$ en $\mathrm{Pic}(S)$ $\forall \sigma, \chi$.

Pardini (1991): Si además se cumple que

a) las D_σ son curvas suaves

b) 3 de las D_σ nunca se intersectan

c) si $D_\sigma \cap D_{\sigma'} \neq \emptyset$ para $\sigma \neq \sigma'$ entonces $D_\sigma \pitchfork D_{\sigma'}$ y σ, σ' son l.i. en G



como $\mathbb{F}_p$-ev

Entonces: $\circlearrowleft G$

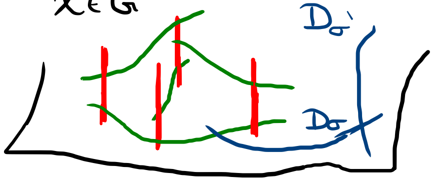
① $\exists\ \pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ G-revestimiento con $Br(\pi) = D \overset{def}{=} \bigcup D_\sigma \subseteq S$.

② $\tilde{S}$ suave

③ $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} = \bigoplus_{\chi \in G^\vee} \mathcal{O}_S(-L_\chi)$

④ $\pi_* K_{\tilde{S}} \cong \bigoplus_{\chi \in G^\vee} K_S(L_\chi)$

Nuestro caso: $(p=2)$ $\hookrightarrow \langle \sigma, \chi \rangle \in \{0,1\}$



(S, C)

- Sea A suficientemente amplio tal que $A \equiv C \pmod 2$ en $Pic(S) \cong \mathbb{Z}^{m+1}$.
- Sea $\sigma_0 \neq 0$ en G fijo (eg $\sigma_0 = (1,1,1)$)

Definir $D_{\sigma_0} := C$, $D_0 = 0$ y $D_\sigma \in |A|$ general tq $D_\sigma \pitchfork D_{\sigma'}$ $\forall \sigma \neq \sigma'$

$L_0 = 0$, $L_\chi = 2A$ si $\langle \sigma_0, \chi \rangle = 0$ para $\chi \neq 0$, y $L_\chi = \frac{3A+C}{2}$ si $\langle \sigma_0, \chi \rangle = 1$

a), b), c) OK (Bertini) ; i) & ii) por definición

Si $\chi \neq 0$
$\langle \chi, \sigma \rangle = 0$
(resp. $= 1$)
para 4 elem.

Eg (ii) : $2L_\chi = \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma, \chi \rangle D_\sigma$? OK si $\chi = 0$ ✓

8 - 2 = 6 términos

Si $\chi \neq 0$: $\sum_\sigma \langle \sigma, \chi \rangle D_\sigma = \langle \sigma_0, \chi \rangle C + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} \langle \sigma, \chi \rangle \underbrace{D_\sigma}_{\sim A \text{ en } \mathrm{Pic}(S)}$

1° Si $\langle \sigma_0, \chi \rangle = 1 \Rightarrow 2L_\chi \overset{?}{=} C + 3A \Rightarrow L_\chi = \frac{3A + C}{2}$ ✓

2° Si $\langle \sigma_0, \chi \rangle = 0 \Rightarrow 2L_\chi \overset{?}{=} 4A \Rightarrow L_\chi = 2A$ ✓

Pardini $\Rightarrow \exists\, \pi : \tilde{S} \to S$ revestimiento abeliano con $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$

Propiedades de $\tilde{S}$:

a) $2K_{\tilde{S}} = \pi^*(2K_S + \sum D_\sigma) = \pi^*(\underbrace{2K_S + C + 6A}_{\text{amplio si } A \text{ muy amplio}}) \overset{\pi \text{ finito}}{\Longrightarrow} K_{\tilde{S}}$ amplio ✓

(Obs : De hecho, $K_{\tilde{S}}$ es muy amplio ! Ver versión arXiv)

b) $q(\tilde{S}) = h^1(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 0$: Sucesión espectral de Leray implica

$$h^1(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) = h^1(S, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \underset{\text{Pardini}}{=} \sum_\chi h^1(S, L_\chi^{-1}) = 0$$

$h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ si $\chi = 0$

Anulación de Serre si $\chi \neq 0$

c) $\tilde{S}$ no posee "automorfismos infinitesimales" (ie, $h^0(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}) = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(\tilde{S})) = 0$):

$$h^0(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}) \underset{\text{Serre}}{=} h^2(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}} \otimes K_{\tilde{S}}) = 0$$ (Anulación de Kodaira-Nakano) ✓

d) $\mathrm{Def}(\tilde{S}) \cong \mathrm{Def}(S, \{D_\sigma\})$ y $\mathrm{Def}(\tilde{S}) \sim \mathrm{Def}(S, C)$ ($\sim (X, p)$!)

Manetti (2001): OK si:

(i) $\dim(S) \geq 2$ y $h^0(S, T_S) = 0$ (OK pues $m := \#\{p_i\} \geq 4$)

(ii) $h^0(S, T_S(-L_\chi)) = 0$ (Kodaira-Nakano + Dualidad de Serre)

$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_S, L_\chi^{-1}) = 0$ (pues $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_S, L_\chi^{-1}) \underset{\text{"dy"}}{=} H^1(S, T_S(-L_\chi)) = 0$)

$h^1(S, L_\chi^{-1}) = 0$ (anulación de Serre + A muy amplio)

(iii) $h^0(S, D_\sigma - L_\chi) = 0 \ \forall \chi \neq 0, \langle \sigma, \chi \rangle = 0$ (" + ").

Para más detalles, ver Marco Manetti "On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces" (Invent. Math. 2001) ⇝ §3 "$(\mathbb{Z}/2)^r$-covers and their deformations"

§4. Truco de Fantechi-Pardini y reducción a $\rho_{\tilde{S}} = 2$, $\pi_1(\tilde{S}) = \{1\}$

El paso final requiere pasar a dimensión superior $d \geq 2$ y usar el Teorema de sección hiperplana de Lefschetz: $\longrightarrow$ Mejora respecto a la versión arXiv, donde considera $\tilde{S} \times C_1 \times \dots \times C_{d-2}$, $C_i \in \mathcal{M}_3$

Hay varios ingredientes técnicos:

① Teoría de Deformación: Considerar $\tilde{S} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ via mult. de $K_{\tilde{S}}$ con $N \geq d+2$

$$(X, p) \sim \mathrm{Def}(\tilde{S}) \underset{\text{Lema}}{\sim} \mathrm{Def}(\tilde{S} \hookrightarrow \mathbb{P}^N) \simeq \mathrm{Def}(\underbrace{Bl_{\tilde{S}}\mathbb{P}^N}_{=:Y} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^N) \underset{\text{Teorema}}{\simeq} \mathrm{Def}(Bl_{\tilde{S}}\mathbb{P}^N)$$

usa $K_{\tilde{S}}$ amplio, $q(\tilde{S}) = 0$

usa $h^1(\mathcal{O}_Y) = h^2(\mathcal{O}_Y) = 0$

② Fantechi-Pardini: Sea $Y := Bl_{\tilde{S}}\mathbb{P}^N$ y notar que

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^N) \simeq \{1\}, \quad \rho_Y = 2, \quad h^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \quad \text{para } 0 < i < \dim Y$$

Considerar $Bl_{\tilde{S}}\mathbb{P}^N = Y \underset{\substack{\text{proy}\\\text{normal}}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^M$ para cierto $M \gg 0$, y sea
$(\text{i.e., } H^0(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(k)) \twoheadrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k)) \text{ sobre } \forall k>0)$

$H \subseteq \mathbb{P}^M$ hipersuperficie de grado $l \gg 0$ tq $W := H \pitchfork Y$ (¿l explícito?)

Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Hilb}(Y) \times \mathrm{Hilb}(H)$ abierto $\neq \emptyset$ que parametriza (Y', H') tq Y', H' suaves, $Y' \pitchfork H'$ y $Y' \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ proy normal.

[FP]

$\Rightarrow \mathcal{U} \to \mathrm{Hilb}(W)$, $(Y', H') \mapsto W' := Y' \cap H'$ es suave

$\Rightarrow \mathrm{Def}(W \hookrightarrow \mathbb{P}^M) \sim \mathrm{Def}(Y \hookrightarrow \mathbb{P}^M) \underset{\text{Lema}}{\sim} \mathrm{Def}(Y)$ $(\sim (X, p))$

y así, $\mathrm{Def}(W) \underset{\text{Lema}}{\sim} \mathrm{Def}(W \hookrightarrow \mathbb{P}^M)$ $(\sim (X, p))$

Notar que: $K_W = (K_Y + H|_Y)|_W$ es amplio para $l \gg 0$.

$\rightsquigarrow$ Repetir lo anterior reemplazando $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ por $W \overset{\text{mult. de } K_W}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{M'}$

Repetir el proceso hasta obtener $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^{M''}$ de dimensión $d \geq 2$.

El Teorema de sección hiperplana de Lefschetz implica

$$\pi_1(Z) = \{1\}, \quad K_Z \text{ amplio}, \quad h^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0 \quad \forall \; 0 < i < d$$

$$\text{y} \quad p_Z = 2 \quad (\text{si } d = 2, \text{ usar Noether - Lefschetz (K. Joshi, 1995)}).$$

$$\Rightarrow \operatorname{Def}(Z) \underset{\text{Inducción}}{\sim} \operatorname{Def}(Y) = \operatorname{Def}(Bl_{\tilde{S}} \mathbb{P}^N) \sim \operatorname{Def}(\tilde{S}) \sim \operatorname{Def}(S, C)$$

$$\sim (\mathbb{P}^2, \{p_i\}, \{l_j\}) \sim (X, p) \qquad \blacksquare$$