Intro a la geom. birracional I Joaquín Moraga

1§ Curvas alg suaves proy $/_{\mathbb{C}}$ (dim 1) : $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N := \mathbb{C}^{N+1}/\mathbb{C}^*$

$g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C) \geq 0$

$g=0$ $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$; $g=1$ curva elíptica (Moduli es $\mathbb{C}$) ; $g \geq 2$ C es tipo general y existe un espacio M_g que los parametriza

¿Cómo se construye M_g?

Tomar ω_C gilluado de líneas en C

$H^0(C, \omega_C)$ tiene muchas secciones $g(C) \geq 2$ y $C \xhookrightarrow{\omega_C^{\otimes 3}} \mathbb{P}^{5g-5}$ de grado $6g-6$. ... $M_g := \mathrm{Hilb}_{5g-5,1,6g-6} // PGL(5g-5)$

Prop : Sea X una variedad normal existe una biyección entre $\{\text{Divisores de Weil}\}/\sim_{\text{lin}} \longleftrightarrow \{\text{haces coherentes reflexivos de rango } 1\}/\cong$

<<Generalized div & reflexive sheaves" Karl Schwede

(ie $\mathcal{F}$ es tal que $\mathcal{F}^{\vee\vee} \simeq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}|_U$ gilluado de líneas, U abierto)

X normal, $X^{sm} \overset{i}{\subseteq} X$ locus suave. $T_{X^{sm}}$, $\Omega_{X^{sm}} = T^{\vee}_{X^{sm}}$

$\omega_{X^{sm}} := \Lambda^n \Omega_{X^{sm}}$, $i_*(\omega_{X^{sm}}) =: \omega_X \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$ → div Weil

$\boxed{K_X \text{ divisor canónico}}$ $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ anillo canónico de X

Definición del blow-up en 0 de $\mathbb{A}^n$: $Bl_0(\mathbb{A}^N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^N$

Mapa birracional. Geom. birracional en curvas suaves proy some.

Definición de div de Cartier en X normal.

Si K_X es Cartier decimos que X es Gorenstein

$\mathbb{Q}$- " $\mathbb{Q}$- " .

Teorema de Castelnuovo.

$X' \to X_1 \to X_2 \to \dots \to X_{min}$ modelo suave proy. minimal?

$\downarrow$

X $\quad p_m(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, mK_X)$, crece de grado $\leq \dim X$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, .., \dim X\}$

9. $\dim \geq 3$

Decimos que X es Fano ~~[illegible]~~ $-K_X \cdot C > 0 \;\; \forall C \subseteq X$

" " X " Calabi-Yau (CY) si $K_X \cdot C = 0 \;\; \forall C \subset X$

" " X es tipo general si $K_X \cdot C > 0 \;\; \forall C \subset X$.

Ejl. $H \subset \mathbb{P}^n$ suave hipers $\Rightarrow$ $\deg(H) < N+1$ / $= N+1$ / $> N+1$
Fano / CY / tipo gen.

	π_1	π_i	$Aut(X)$	$Bir(X)$	$X(\mathbb{Q})$
Fano	$\{1\}$	"parecidos a los de las esferas"	grupo alg lineal	Cremona	Denso / vacío
CY	nilpotente de rango $\leq 2n$	??	el grupo disc puede no ser g.g.	??	??
tipo gen.	??	??	Finito	Finito	Conj. Lang etc. $Z \subsetneq X$

$\mathbb{Q}$-Gorenstein + mild sing (e.g. cocientes)

¿Cómo trabajar con dim ≥ 3? Numéricamente equiv.

Si X normal $\Rightarrow$ esp. div $/ \equiv$ ~~[illegible]~~ es un $\mathbb{Z}$-mod g.g. $=: N^1(X)$

análogamente $N_1(X)$ con curvas: $N^1(X)_{\mathbb{Q}} \otimes N_1(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [D] \times [C] \mapsto DC$

$\rho(X) = \dim_{\mathbb{Q}} N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ es el rango de Picard de X.

un $D \subset X$ ~~es neg~~ es llamado NEF si $D \cdot C \geq 0$.

$Neg(X)$ = Cono en $N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ generado por div neg.
$NE(X)$ es el cono en $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ por curvas efectivas.

$$\overline{Neg(X)}^{\vee} = \overline{NE(X)}$$

<u>Teorema</u> (Teorema de Cono) Si X es suave, proy podemos escribir

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$$

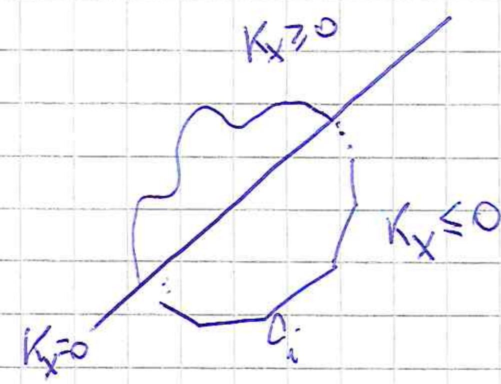
I es contable, C_i es una curva racional para la cual $0 < -K_X \cdot C_i < 2 \dim X$ y los C_i solo pueden acumular hacia $K_X = 0$.

<u>Ej</u>.- $\dim = 2 \Rightarrow$ rayos son (-1)-curvas.

<u>Teo</u> (contracción) X suave proy. $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$ donde C_i es una curva extremal de $\overline{NE}(X)$ y K_X negativo.

$\Rightarrow \exists\, X \to Y$ que contrae exactamente las curvas cuya clase está en R.

<u>Problema</u>: Qué sing. tiene Y? K_Y es $\mathbb{Q}$-Cartier?



Intro a la geom. biracional (Joaquín M.)

Hoy: programa de Modelos minimales (MMP)

outcomes del teorema de contracción:

1. $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es un morfismo biracional y $Ex(\varphi)$ contiene un divisor
$\Rightarrow$ Decimos que φ es una contracción divisorial.
Y será $\mathbb{Q}$-Gorenstein (sing. log terminal), $\rho(Y) = \rho(X) + 1$.

2. $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es biracional y $Ex(\varphi)$ no contiene divisores
Claim: K_Y no es $\mathbb{Q}$-Cartier.
(Asumamos es $\mathbb{Q}$-Cartier, $\varphi^*(mK_Y) \cdot C = mK_Y \cdot \underbrace{\varphi_*(C)}_{\text{pto}} = 0$
$C \subseteq X$ curva tal que $\varphi(C) = $ pto
pero $\varphi^*(mK_Y) = mK_X$ y $K_X \cdot C < 0$ $\rightarrow\leftarrow$)

Esperamos que $\bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*(mK_X)$ es un haz f.g. como $\mathcal{O}_Y$-módulo.

$X^+ = \mathrm{proj}_Y \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_* mK_X$ donde
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "FLIP"] \arrow[dr] & & X^+ \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

dim ≥ 4 los índices de sing pueden ser más malos

donde $\rho(X) = \rho(X^+)$, toda curva contraída por $X^+ \to Y$ es K_{X^+}-positiva y K_{X^+} es $\mathbb{Q}$-Cartier y
X log terminal $\Rightarrow$ X^+ log terminal.

Como varían los invariantes?

Kulikov 1970: espacios de moduli de superficies K3.

3. $X \xrightarrow{\varphi} Y$ con $\dim Y < \dim X$, F es una fibra general, entonces $K_F = K_X|_F$ es anti-amplio, $K_F \cdot C < 0 \ \forall C$.
(Fano fibration)

Remark: En el Teorema de Cono y contracción, podemos reemplazar suave por l.t. ($\Rightarrow$ normal).

MMP Sea X suave o log terminal.

Paso 1: Si K_X es nef $\Rightarrow$ X es un modelo minimal.

Paso 2: Si K_X no es nef $\Rightarrow$ Thm Cono + Thm Contr. nos da una contracción $X \to Y$

- Si φ es contr. div $\Rightarrow$ reemplazar X por $Y \longrightarrow$ Road
- Si φ es una contr. flip $\Rightarrow \exists_? X \dashrightarrow X^+$, reempl. X por $X^+ \to$ Paso 1
- Si φ es fibración Fano $\Rightarrow$ paramos.

Conjeturas: X log terminal

(1) ($\exists$ flips) Si $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es contr. de flip $\Rightarrow$ $\exists$ flip $X \dashrightarrow X^+$ existe.
(2) (Terminación de flips) Todo $X \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_s$ de flips termina

(3) (Abundancia) Si K_X nef y X l.t.
$\exists$ $X \to Y$ que contrae exactamente las curvas K_X triviales, por ende, si $\dim Y < \dim X$, X está fibrada por Variedades CY.

Asumiendo Conj (1)—(3): El algoritmo termina con:
$X \underset{MMP}{\dashrightarrow} X'$ $\Rightarrow$ X' es:

- X' tiene una fibración Fano.
- X' tiene una fibración CY
- X' es de tipo general ($\exists X' \to X''$ donde X'' es canónicamente polarizada)

Estado del Arte: $\{\text{suave}\} \subseteq \{\text{terminal}\} \subseteq \{\text{log terminal}\}$ III 3.

(Existencia de flips):

- Kollár y Mori demuestran existencia de flips 3-folds term 1992
- Shokurov demuestra $\exists$ flips en 3-folds log terminal 2000's.
- Shokurov " $\exists$ " 4-folds terminal 2003
- BCHM 2006 demuestra $\exists$ flips log terminal $\Rightarrow$ Conj 1 ✓.

(Terminación de flips):

- K-M terminación dim 3 term
- Shokurov " " log term
- Fujino " dim 4 term 2006
- M " dim 4 l.t. K_X pseudo-eff. (límite de fibr. lineales con secciones) 2016

(Abundancia)

- dim 3: Kawamata l.t. Mori Kollár-McKernan-Keel-Matsuki 1990 2003

obs 1.- (dim 3): $X \dashrightarrow X^+$ flip 3-folds $\Rightarrow$ X tiene un pto sing.
(dim 4) $X \dashrightarrow X^+$ $\exists$ flips de suave a suave.

Pares $(\underbrace{X}_{\text{v. proy normal}}, \underbrace{\Delta \geq 0}_{\text{div}})$, $K_X + \Delta$ es $\mathbb{Q}$-Cartier.

$$\underset{\text{finito}}{G} \circlearrowright Y \to X := Y/G \qquad K_Y = \pi^*\big(K_X + \underbrace{\textstyle\sum (1-\frac{1}{m_D})D}_{\Delta}\big)$$

$$\begin{array}{c} Y \\ \psi \downarrow \\ X \end{array}$$

ψ proy. birracional, $E \subseteq Y$ irreducible

$\psi^*(K_X+\Delta) = K_Y + \Delta_Y$ definido por la fórmula

(X,Δ) par

la log discrepancia de (X,Δ) en E es

$$a_E(X,\Delta) = 1 - \mathrm{coeff}_E\, \Delta_Y$$

Motto :

(X, Δ) es log canónico si $a_E(X,\Delta) \geq 0$ $\forall E$ (*).
(X, Δ) es log terminal si $a_E(X,\Delta) > 0$ $\forall E$
(X, Δ) es canónico si $a_E(X,\Delta) \geq 1$ $\forall E$
(X, Δ) es terminal si $a_E(X,\Delta) > 1$ $\forall E$ que no esté en X.

dim 2 terminal $\iff \Delta = 0$ y X es suave. / l.t. dim 2 $\iff$ sing cociente

En toda dim las sing cocientes son log terminal.
Un cono sobre una variedad Fano con polarización $-K_X$ es log terminal.

Un cono sobre una var. CY es log canónico pero no log terminal.

Intro geom. bir. Joaquín II.

$(X, \Delta \geq 0)$ decimos que es un par si $K_X + \Delta$ es $\mathbb{Q}$-Cartier
X var. quasi proy
i.e. $m(K_X+\Delta)$ define un fibrado de línea $\exists m$.

Ej.- $\mathbb{P}^1 = C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ con veronese grado n.
Tomar cono sobre C en $\mathbb{A}^{n+1}$: C_n
Podemos resolver C_n haciendo blow-up en $(0,\dots,0)$.

$$\pi_n^*(K_{C_n}) = K_{X_n} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E$$

Recuerdo de log discrepancias $a_E(X,\Delta)$: ver (*)
Remark: El teorema de cono y contracción son válidos para pares log canónicos: $0 < (K_X+\Delta)\cdot C_i < 2\dim X$ C_i racional curvas singular!

Prop1.- (Corollario Teo. índice de Hodge)
(1) Si (X,Δ) es un par y $X \xrightarrow{\pi} Y$ contracción div. y $\Delta_Y = \pi_*(\Delta)$
$\Rightarrow a_E(X,\Delta) \leq a_E(Y,\Delta_Y)$.

(2) Si (X,Δ) es un par y $X \dashrightarrow X^+$ es flip
$\Delta^+ = \pi_*(\Delta) \Rightarrow a_E(X,\Delta) \leq a_E(X^+,\Delta^+)$.

Teorema: En toda dimensión un punto suave es terminal. y en dim 2 un punto terminal es suave.

Cor: Si X suave proy. y tiene un modelo minimal X_{min}
$\Rightarrow X_{min}$ tiene sing. terminales.

Teorema: Si X es suave proy, $X^+ = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))\right)$, entonces (asumiendo que el anillo es f.g.) la var. X^+ tiene sing canónicas.

X^+ es llamado modelo canónico. (K_{X^+} es amplio)

Ejl.- Superficies: $\varphi: X_{min} \to X_{can}$
Caso 1: bir contrae a ADE.
Caso 2: φ fib hacia una curva.
Caso 3: $X_{can} = pto$, X_{min} sup CY.

en dim 2 l.t. = cociente / l.c. $\supset$ {cocientes y elípticos}

Caso dim 3:

las sing. terminales son hypercocientes y fueron clasificadas por miles Reid.

$\left.\begin{array}{l}\text{Can} \\ \text{log term} \\ \text{log Canoni}\end{array}\right\}$???

Teorema (Kollár 2010) $\exists$ sucesión de sing. de dim 4 $(X_i; x_i)$ canónica de tal forma que emb dim$(X_i, x_i) \to \infty$
$\# \text{eq}(X_i; x_i) \to \infty$

$\pi_1 = 1$ todos.
un punto.

def. $K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ $(X; x)$ con $mK_X \sim 0$
índice

(index 1 cover) $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}(K) \oplus \mathcal{O}(2K_X) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}((m-1)K))$ $K_Y \sim 0$.

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow m:1 \\ X \end{array}$$

$\therefore$ Canónica $\to$ log terminal

pero no sabemos quiénes son canónica.

Canonical log term log canon	pueden ser no aislados

- Sing. cociente: $G \circlearrowright (\mathbb{C}^n, 0)$, $X = \mathbb{C}^n/G$ G no tiene pseudo-refl.
  (finito)

  Sing. tórica: $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^n \circlearrowright (\mathbb{C}^n, 0)$ $X = \mathbb{C}^n/\mathbb{T}$ sing tórica

  Teorema: todas las ecuaciones de una sing tórica son binomiales.

- Si el índice de una sing. es $m \Rightarrow$ las log discrep. están en $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

log discrepancia minimal: $(X; x)$ es el valor

$$mld(X; x) = \min\{a_E(X) \,/\, C_X(E) = x\}$$
(centr. de E en x)

Conj (semi-cont.): $mld(X; x)$ es upper semicontinuo en x.

Conj (Cond. de ascenso): El conjunto $\{mld(X, x) \,/\, \dim X = n\}$. no tiene secuencias inf estrictamente crecientes.

Teorema (Shokurov, 2004)

Conj semi-cont y conj. cond. de ascenso de dim n
$\Rightarrow$ terminación de flips en dim n.

$\boxed{\text{Ambas conj}}$ se conocen para sing cocientes y tóricas.

Definición: Decimos que X proy es tipo Fano si existe $\Delta \geq 0$ tal que (X, Δ) es log terminal y $-(K_X + \Delta)$ es amplio.
Decimos que X es tipo CY si existe $\Delta \geq 0$ tal que (X, Δ) es l.t. y $K_X + \Delta \equiv 0$.

Def: Decimos que $(X; x)$ es de tipo l.t. si $\exists \Delta \geq 0$ tal que (X, Δ) es l.t. en una vecindad de $X \ni x$.

Principio Global-local:

Teorema (Kollár 2010) X = variedad tipo Fano, $\overset{-K}{\overset{\|}{A}}$ amplio en X
$\Rightarrow C(X, A) = \mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mA))\right)$ es de tipo log terminal.

Teorema (Prokhorov 2006, Xu 2014) $(X; x)$ tipo log terminal
$\Rightarrow \exists$ morfismo proy bir $Y \xrightarrow{\varphi} X$ que contrae un único div primo $E \to x$ $(Y \setminus E \cong X \setminus \{x\})$ de forma que E es de tipo Fano.

Grupos fund de sing.

$(X;x)$ sing alg $x=\{0\}\in X\subseteq \mathbb{A}^N$, $\pi_1(\overbrace{B_x(\varepsilon)\cap X}^{\text{link}}) =$ grupo fund del link de la sing

$\overset{\shortparallel}{\pi_1(X,x)}$ $\quad 0<\varepsilon<<1$

Thm (Kollár-Kapovich 2013) Si G es un grupo f.p. existe una sing alg $(X;x)$ de dim 3 tal que $\pi_1(X;x)\simeq G$.

Q: Que sucede para las sing. log terminales?

Teo: (Xu 2014) Si $(X;x)$ es log term., entonces $\hat{\pi}_1(X;x)$ es finito.

Teo: (Braun 2020) Si $(X;x)$ es log term., entonces $\pi_1(X,x)$ es finito.
Si G es finito existe $(X;x)$ log terminal $\pi_1(X;x)\simeq G$.

Teo (1878 Jordan): Si $G\leq Gl_n(\mathbb{C})$ finito,
$\exists A\trianglelefteq G$ abeliano de índice $\leq f(n)$ $\rightarrow$ Si $n\geq 71$, $f(n)=n!$ Collins 2010.
$A \cong \mathbb{Z}/m_1\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}/m_n$

Cor.- Si (X,x) es una sing. cociente n-dim $\Rightarrow \exists A\trianglelefteq \pi_1(X;x)$ de índice $\leq f(n)$.

Teorema (Braun-Filipazzi-M-Svaldi 2022): Si $(X;x)$ n-dim log term $\Rightarrow \exists A\leq \pi_1(X,x)$ abeliano de rango $\leq n$ e índice $\leq g(n)$

topología:
log term $\underset{\text{homeo}}{\simeq}$ cociente $\rightsquigarrow$ ... geometría sing lt $\rightsquigarrow$ Conj de Shokurov $\rightsquigarrow$ terminación de flips