SGA 09/08.

N-resoluciones (con J-Tevelev)

§1. Generalidades de superficies singulares y no singulares

($k = \mathbb{C}$) Superficies complejas (Irreducibles, normales).

Proyectivas | cuasi-proyectivas | Vecindad analítica.

Si X está localmente definida en $\mathbb{C}^n$ y su ideal es $(f_1, \dots, f_n)$

$\Rightarrow$ $x \in X$ es no singular $\Leftrightarrow$ rango $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i,j}$ en x es $n-2$

Como X es normal $\Rightarrow$ X tiene finitos puntos singulares.

$\mathcal{O}_X$ = haz estructural.

$\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ = funciones regulares en $\mathcal{U}$.

$m_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ son las localizaciones en $x \in X$

Espacio cotangente Zariski m_x/m_x^2, $\mathbb{C}$-esp vectorial de dim finita.

- $\dim_{\mathbb{C}}\left(m_x/m_x^2\right) = 2 \Leftrightarrow x$ es no singular.

es decir, $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular.

- La multiplicidad de $x \in X$ es la mult de $m_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$

Ej: $\{F(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ⇝ irred homogeneo con sing aisladas.

Ej: $C_1 \times C_2$, C_i sup de Riemann compacta.

Ej: Intersecciones completas no singular.

$$\left\{ \begin{array}{r} X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = X_3^2 \\ X_0^2 + X_1^2 = X_4^2 \\ X_0^2 + X_2^2 = X_5^2 \\ X_1^2 + X_2^2 = X_6^2 \end{array} \right. \subseteq \mathbb{P}^6_{\mathbb{C}}$$

X irred, singular, normal y tiene 48 singularidades nodales A_1

$$A_1: \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Esta es una base de cubrimientos dobles:

$$X \xrightarrow{2:1} \xrightarrow{2:1} \xrightarrow{2:1} \{X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = X_3^2\} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Def: Dos singularidades son isomorfas si:

$$\text{2 singularidades homogeneas} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \cong \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \Leftrightarrow \exists\ U_x \cong U_y$$

como variedades analíticas.

Def: La dimensión de incrustación de X con singularidad p es la mínima dimensión de una variedad suave Y tal que X se incrusta en Y.

Prop: $\dim_{\mathbb{C}}\left(m_x / m_x^2\right)$ = dimensión de incrustación de $x \in X$.

Resolución de singularidades:

Def: Dado $(x \in \overline{X})$ singular, sea $\pi: X \to \overline{X}$ un morfismo propio biracional el cual es una resolución de $x \in \overline{X}$, y así X es no singular. y fuera de $\mathrm{Exc}(\pi) := \pi^{-1}(x)$ el morfismo π es un isomorfismo.

* Se llamará minimal si $\pi^{-1}(x)$ no contiene (-1)-curvas (Siempre existe y es única).

Def: Una curva $C \subseteq X$ = no singular es $(-m)$-curva si $C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y $C^2 = -m$

obs - Si $C \subseteq X$ es (-1)-curva $\Rightarrow$ Castelnuovo, existe contracción

$$\pi : X \longrightarrow X'$$
$$C \longmapsto x \quad \text{(no singular)}$$ i.e un blow-up.

Def: Un $(x \in X)$ es singular racional si existe π resolución tal que $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = 0$ para $i \geq 0$.

Def: El género geométrico de una singularidad es

$$p_g(x \in \overline{X}) := \dim_{\mathbb{C}}\left(H^0(\overline{X}, (R^1\pi_*\mathcal{O}_X)_x) \right)$$

Obs: Como $\overline{X}$ es normal: $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\overline{X}}$

* Cuando $R^i\pi_*\mathcal{O}_X = 0$ para $i \geq 0$ $\Rightarrow$ $H^i(\overline{X}, \pi_*\mathcal{O}_X) = H^i(X, \mathcal{O}_X)$
para $i \geq 0$

Por sucesión de espectral de Leray:

$$0 \to H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(\overline{X}, R^1\pi_*\mathcal{O}_X)$$
$$\to H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \to 0.$$

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \sum_{x\in X} p_g(x \in X)$$

Obs: 1) X = no sing proy

$\Rightarrow$ Teoría de intersección (en los divisores).
$\mathbb{Z}$-curvas.

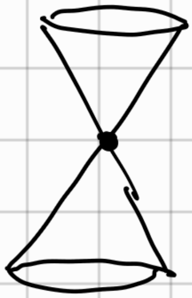
2) $\pi : X \to \overline{X}$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Exc}(\pi) \longmapsto x \\ \| \\ \sum_i E_i \end{array}$$

Mumford. $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} E_1 & \cdots & E_k \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_k \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \end{array}$ es negativa definida.

(3) Existe teoría de intersección para div de Weil en una superficie normal.

$$R \cdot R' = \frac{1}{2}$$



$\{x^2+y^2+z^2=0\}$.

Artin y su ciclo fundamental.

$$Z = \sum_{r_i \geq 0} r_i E_i$$

es ciclo fundamental (es único) si es el más pequeño (dentro de los efectivos en los E_i) tal que $Z \cdot E_i \leq 0$.

Prop: $P(Z) = 1 - \chi(\mathcal{O}_Z) \geq 0$ y

$$P(Z) = 0 \iff (x \in \overline{X}) \text{ es racional}$$

- $\mathrm{Exc}(\pi)$ es un árbol de $\mathbb{P}^1$
- La mult de $x \in \overline{X}$ es $-Z^2$
- La dimensión esp tangente es $-Z^2+1$.

Prop: (Teo contracción de Artin)

$\mathrm{Exc} = \sum_{\text{finita}} E_i \subseteq X$ = in normal.

Son equivalentes:

1) Exc es contractible y $\pi : X \to \overline{X}$ satisface $\chi(\mathcal{O}_X)$
2) $\forall Z > 0$ con soporte Exc tenemos $P(Z) \leq 0$.
3) $-(E_i \cdot E_j)$ neg def
   - Z es ciclo fundamental y $P(Z) = 0$.
   - Si X es proyectiva $\Rightarrow \overline{X}$ proyectiva.

$\pi : X \to \overline{X}$ $\implies K_X \equiv \pi^* K_{\overline{X}} + \sum\limits_{d_i \in \mathbb{Q}} d_i E_i$

$\cup$

$Exc(\pi) \mapsto x$

y si $(x \in X)$ es sing $\implies d_i \leq 0$, $\forall i$

$d_i = d_i(E_i)$ las discrepancias.

• Def: $d_i = 0 \ \forall i \iff (x \in X)$ canónicas.

(Singularidades modelos canónicos de las sup de tipo general)

$-1 < d_i \leq 0 \ \forall i \iff (x \in X)$ log terminal $\iff$ sing cocientes

$-1 \leq d_i \leq 0 \ \forall i \iff (x \in X)$ log canónica.

(las singularidades que aparecen en las superficies K-S-B-A que compactifica las superficies de tipo general).

Ej: X no singular

$\cup$

$E_1, \ldots, E_r$ $\quad E_i \cong \mathbb{P}^1$

tal que $E_i^2 \leq -2$ y $\begin{bmatrix} -e_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & -e_2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & -e_r \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^{r} E_i$ es fundamental y $P(Z) = 0$

- $Z \cdot E_i \leq 0 \quad \forall i$
- $P(Z) = 0$: De la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_X(-Z) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$

Tenemos que $\chi(\mathcal{O}_Z) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-Z))$.

Por Riemann Roch: $\chi(\mathcal{O}(-Z)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(Z^2 + K \cdot Z)$

- Por adjunción $K \cdot Z = \sum_{i=1}^{n} K \cdot E_i = \sum_{i=1}^{n} (-2 + e_i)$

- $Z^2 = E_1 \cdot Z + \sum_{i=2}^{n-1} E_i \cdot Z + E_n \cdot Z = 2 - e_1 - e_n + \sum_{i=2}^{n-1} (2 - e_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} (2 - e_i) - 2$.

$\Rightarrow Z^2 + K \cdot Z = -2$ y así $\chi(\mathcal{O}(-Z)) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1$.

Por lo tanto, $\chi(\mathcal{O}_Z) = 1$ y así $P(Z) = 0$. ■

Por el teorema de Artin $\pi : Y \to \overline{X}$ ... la cadena ...

Por el teorema de Artin $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ contrae la cadena a la singularidad cociente cíclica.

La multiplicidad de $(x \in \overline{X})$ es $-Z^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i - 2) + 2$.

La dimensión del espacio tangente en $(x \in \overline{X})$ es $-Z^2 + 1$.