SGA 11/10

N-resoluciones ([TU-Junio])

Dados $0 < \Omega < \Delta$ enteros coprimos, sea $(p \in \overline{W}) = \frac{1}{\Delta}(1,\Omega)$.

Entonces, existe espacio $\mathrm{Def}(p \in \overline{W})$ y

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Componentes irreducibles} \\ \text{de } \mathrm{Def}(p\in\overline{W}) \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} P\text{-resoluciones de} \\ \mathrm{Def}(p\in\overline{W}) \end{matrix} \right\}.$$

(T-sing + Du val y K amplio)

$$\xleftrightarrow[1-1]{} \underset{C-S}{K(\overline{W})} \xleftrightarrow[1-1]{} \left\{ \begin{matrix} M\text{-resoluciones} \\ \text{de } (p\in\overline{W}) \end{matrix} \right\}$$

(Solo sing Wahl y K nef).

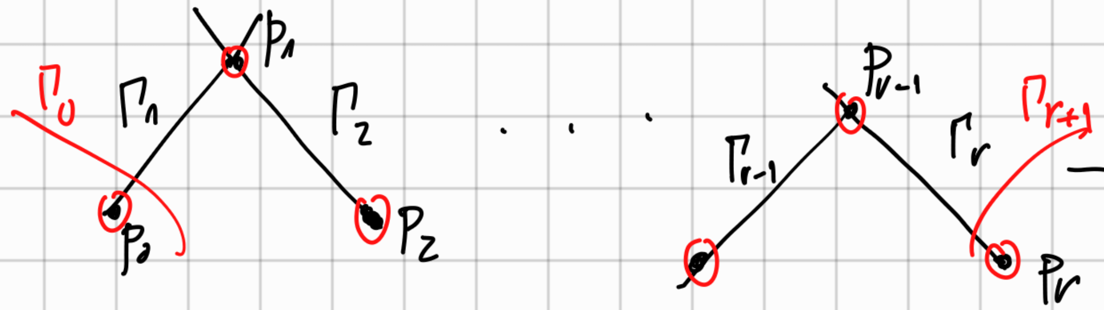
$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} N\text{-resoluciones} \\ \text{de } (p\in\overline{W}) \end{matrix} \right\} T\text{-}U$$

(Solo sing de Wahl y $-K$ nef).

Def: Una <u>resolución de Wahl</u> es:

$$\mathrm{Exc}: (\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r) \subseteq W \longrightarrow (p\in\overline{W})$$

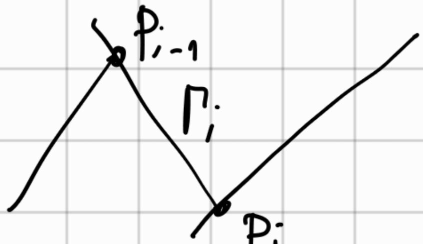
donde $\mathrm{Exc} \mapsto p$ y fuera de p es isomorfismo tal que:



$\longrightarrow \frac{1}{\Delta}(1,\Omega)$

$P_i = \frac{1}{n_i^2}(1, n_i a_i - 1)$ sing Wahl, $\Gamma_i \cong \mathbb{P}^1$ o suave.

S_i . . .



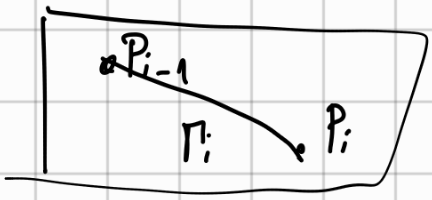
$= W$

. . .

$$\Rightarrow \Gamma_i^2 + K_W \cdot \Gamma_i = -\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2},$$ y notación:

$$n_i n_{i-1} |K_W \cdot \Gamma_i| = \delta_i \geq 0$$

Sabiendo que



$\longrightarrow \frac{1}{\Delta_i}(1, \Omega_i)$

$$\Gamma_i^2 = -\frac{\Delta_i}{n_{i-1}^2 n_i^2} < 0.$$

Def: Sea W^+ una M-resolución de $(p \in \overline{W})$, la correspondiente N resolución es una resolución de Wahl tal que

$$\left(\begin{array}{l} \overline{\Gamma_i} = 1, \ldots, r \\ \overline{P_i} = \frac{1}{\overline{n_i}^2}(1, \overline{n_i}\,\overline{a_i} - 1) \\ \overline{\delta_i} \end{array} \right)$$

1) $\overline{\delta}_{r-i+1} = \delta_i$, $i = 1, \ldots, r$.

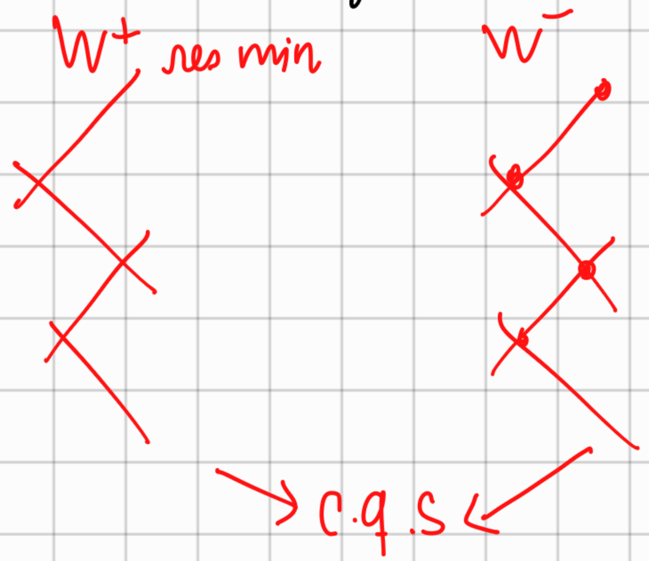
2) $-K_W$ es nef relativo a $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$

i.e $(\bar{\Gamma}_i \cdot K_W \leq 0)$.

3) $\overline{P_r} = P_0$, y $\forall i = 1, \dots, r$ $\quad \bar{\Gamma}_{r-i+1} \cup \cdots \cup \bar{\Gamma}_r \subseteq W^-$

contrae a una c.q.s igual a contraer $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_i \subseteq W^+$.

Ej: 1



Def: Resolución de Wahl extremal = res Wahl con $r = 1$.

Ej:

 $\rightarrow \frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$ | $\delta = 0$  $\rightarrow \frac{1}{2n^2}(1, 2na - 1)$ | Γ^-  $\rightarrow \frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$

P-res ext | | mK2Δ

Si $\delta \geq 2$, familia ∞ de antiflips.

¿Cómo se calculan todas las N-resoluciones?

Para las M-res:

$$[b_s, \dots, b_1] - (1) - [a_1, \dots, a_r] = 0.$$

$$[\ldots, b_{i_e}, \ldots, b_{i_1}, \ldots] - (1) - \underbrace{\left[\begin{pmatrix} n_0 \\ a_0 \end{pmatrix}\right] - (c_1) - \left[\begin{pmatrix} n_1 \\ a_1 \end{pmatrix}\right] \cdots - \left[\begin{pmatrix} n_r \\ a_r \end{pmatrix}\right]}_{M\text{-res}} = 0$$

$$-c_i = \widetilde{\pi}_i^{\,2}$$

$$\frac{n_0}{n_0 - a_0} = [b_1, \ldots, b_{i_1 - 1}]$$ (Con cuidado se tiene lo siguiente)

$$[\ldots, b_{i_e}, \ldots, b_{i_{e-1}}, \ldots, b_{i_1}, \ldots]$$

$$\frac{n_0}{n_0 - a_0}$$

$$\frac{n_1}{n_1 - a_1}$$

$$\frac{n_r}{n_r - a_r}$$

Para las N-resoluciones: Consideramos los valores $d_i = b_i - k_i$ de la fracción del caso asociada a la M-resolución. Consideramos $d_{i_1}, \ldots, d_{i_e}$ donde $d_{i_j} \neq 0$.

Definimos $\overline{n}_{r-i} = \widehat{n}_i$, $\overline{a}_{r-i} = \widehat{a}_i$ donde r es el largo de la fracción dual.

Así:
- Si $i_1 = 1$, entonces $\widetilde{n}_p = \widetilde{a}_p = 1$ para $p = 0, \ldots, d_1 - 1$.
- Si $i_1 > 1$, entonces $\dfrac{\widetilde{n}_p}{\widetilde{n}_p - \widetilde{a}_p} = [b_1, \ldots, b_{i_1 - 1}]$ para $p = 0, \ldots, d_{i_1} - 1$.

• Sea $q = \sum_{j=1}^{k} d_{i_j}$, entonces $\frac{\tilde{n}_p}{\tilde{n}_p - \tilde{a}_p} = [b_1, \ldots, b_{i_{k+1}-1}]$

para $p = q, \ldots, q + d_{i_{k+1}} - 1$

Esquemáticamente:

$$[b_s, \ldots, b_{i_e}, b_{i_e - 1}, \ldots, b_{i_1}, b_{i_1 - 1}, \ldots, b_1]$$

$$\frac{\overline{n_r}}{\overline{n_r}-\overline{a_r}} \qquad \frac{\overline{n_0}}{\overline{n_0}-\overline{a_0}} \qquad \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_1}-\overline{a_1}}$$

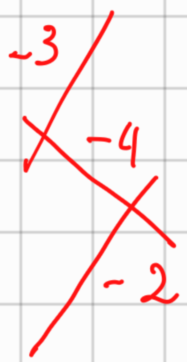
Para calcular las autointersecciones, si Γ_i pasa por al menos una singularidad de Wahl, su transformada propia en la resolución minimal tiene autointersección (-1). De lo contrario, es (-2).

Ejemplo: $\frac{1}{19}(1,7)$. $\frac{19}{7} = [3,4,2]$, $\frac{19}{19-7} = [2,3,2,3]$

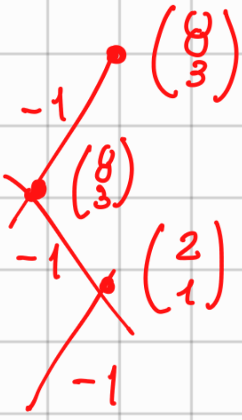
Fracción del cero

$[1,2,2,1]$

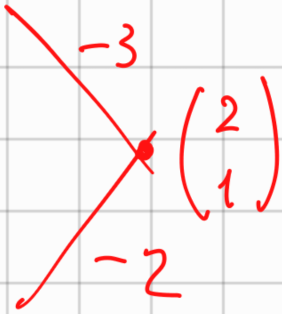
M - resolución



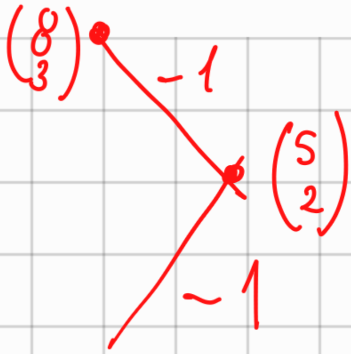
N - resolución



[1, 3, 1, 2]

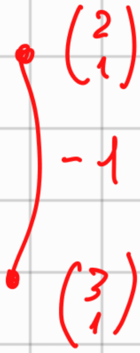


−3
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
−2

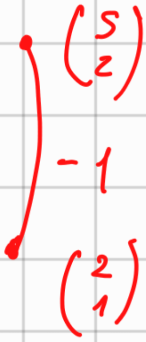


$\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
−1
$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
−1

[2, 2, 1, 3]



$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
−1
$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
−1
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$