$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$$

Cat. derivadas

Francisco Gallardo

8/Nov/2022

$D^b(X)$ y descomposiciones

$X =$ var. proy. $/k$.

(1) Construir $D(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ cat. abeliana (R-mod, Sh_X, $QCoh(X)$, $coh(X)$).

- $Kom(\mathcal{A})$: objetos $A^\bullet : \dots \to A^{i-1} \xrightarrow{d_A^{i-1}} A^i \xrightarrow{d_A^i} A^{i+1} \to \dots$ $\quad d \circ d = 0$.

  Morfismos $A^\bullet \to B^\bullet$ conmutativos con d.

y $Kom(\mathcal{A})$ es abeliana. Dado $A^\bullet$ tenemos objetos

$$H^i(A^\bullet) := \ker d_A^i / \operatorname{Im} d_A^{i-1} \in \mathcal{A}.$$

(cohomología de complejos)

Def.- Un $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es quasi-isom (qis) si $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ son isomorfismos $\forall i$.

$$\begin{tikzcd}
\dots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \dots \\
\dots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}$$

son qis.

$$(f,g) \mapsto xf + yg$$

$$0 \to \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y] \to 0$$

misma cohom ~~No~~ qis

$$0 \to \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C} \to 0$$

<u>Def.</u>- $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Kom}(A)[S^{-1}]$, $S = \{$ qis en $\mathrm{Kom}(A)\}$.

<u>Homotopía</u>: Una <u>homotopía</u> (de $A^\bullet$ a $B^\bullet$) es una colección de morfismos $K^i : A^i \to B^{i-1}$ y $f, g \in \mathrm{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$ se dicen homotópicos si $f - g = Kd + dK$. (Hatcher 2.10).

<u>Def.</u>- $K(A)$ categoría homotópica de A : objetos son los $A^\bullet$ y $\mathrm{Hom}_{K(A)}(A^\bullet, B^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(A)}(A^\bullet, B^\bullet) \big/ f \sim g$ si son homotópicos

Como morfismos homotópicos producen mismo morfismo $H^i(f) = H^i(g)$ $\Rightarrow$ desciende lo de qis.

<u>Def</u>: $\mathcal{D}(A) = K(A)[S^{-1}]$. Morfismos

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "s_1"', "\text{qis}"] \arrow[dr, "f_1", "\text{morf.}"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

obj $\mathcal{D}(A)$: $A^\bullet$ de siempre

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

es lo mismo si

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & \bar{X} \arrow[l, "\bar{s}"'] \arrow[u, "r_1"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "r_2"] & Y \\ & X_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{tq} \quad \bar{s} = s_1 r_1 = s_2 r_2 \in S.$$

$\exists \bar{X}$

y los morfismos correspondientes

- $\mathcal{D}(A)$ no es abeliana, pero es triangulada (Verdier)

(1) $\boxed{\text{Shift}}$ $[1] : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ autoequivalencia

$A^\bullet[1]$ es el complejo $A^\bullet[1]^i = A^{i+1}$

$d^i_{A^\bullet[1]} = -d^{i+1}_A$ y $f[1]^i = f^{i+1}$

y así se define $A^\bullet[n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

(2) $\boxed{\text{Cono}}$ $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ el cono de f es $C(f)$ donde

$$C(f)^i = A^{i+1} \oplus B^i = A[1]^i \oplus B^i.$$

$$\text{y} \quad d^i_{C(f)} = \begin{pmatrix} d^i_{A[1]} & 0 \\ f[1] & d^i_B \end{pmatrix}.$$

(3) $\boxed{\text{Triángulos}}$ $A \to B \to C \to A[1]$

y es distinguido si es isomorfo a

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} A[1]$$

(4) $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) = \{ A^\bullet \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) : H^i(A^\bullet) = 0, \quad i \ll 0 \}$

$\quad -$ $\qquad \| \qquad i \gg 0$

$\quad b$ $\qquad \| \qquad |i| \gg 0.$

(2) $\mathcal{D}^b(X) := \mathcal{D}^b(Coh(X))$ Diferencias entre X suave o no!

<u>Localmente</u>:

$$A = k[x_1, \dots, x_n]$$

- Hilbert Syzygy: M un A-módulo f.g. entonces admite una resolución por módulos libres de largo $\leq n$.

$\overset{\rightsquigarrow}{\text{geom.}}$ Todo $\mathcal{F} \in Coh(X)$ admite resol. finita por haces localmente libres.

<u>Serre</u>: A Noetheriano, $gl\dim A < \infty \iff A$ regular y $\dim Krull\, A < \infty$.

$\overset{\text{Geo}}{\rightsquigarrow}$ Si X no es suave, existen haces que no admiten resolución finita.

<u>Teorema</u>: (Bondal, Orlov 97')
Sean X, Y suaves y K_X amplio o antiamplio.
Entonces $\mathcal{D}^b(X) \equiv \mathcal{D}^b(Y) \iff X \simeq Y$.

(3) Descomposiciones.

Def.- (ortogonal) $\mathcal{D}$ triangulada se descompone en sub-cat. Δ's $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$ si

(i) $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ contienen cosas no 0.

(ii) $\forall A \in \mathcal{D}$ existe un Δ distinguido

$$B_1 \longrightarrow A \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_1[1]$$

(iii) $\mathrm{Hom}(B_1, B_2) = \mathrm{Hom}(B_2, B_1) = 0$.

Prop.: X es conexo $\Rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ es indescomponible.

Def.- $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es admisible si $i: \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ admite adjunto por derecha π.

Def.- $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ admisible definimos

$$\mathcal{D}'^{\perp} = \{ C \in \mathcal{D} : \mathrm{Hom}(B, C) \simeq 0, \forall B \in \mathcal{D}' \}$$
$$= \{ C \in \mathcal{D} : \pi(C) \simeq 0 \}.$$

Def.- Una secuencia $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$ admisibles es <u>semi-ortogonal</u> si $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_j^{\perp}$, $i < j$

$$\mathrm{Hom}(B_j, B_i) = 0$$

y $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ es desc semi-ort de $\mathcal{D}$ si

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \rangle \qquad (\text{s.o.d.})$$

Ej.- $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ admisible $\Rightarrow \mathcal{D} = \langle \mathcal{D}'^{\perp}, \mathcal{D}' \rangle$.

La forma más simple de encontrar descomposiciones

<u>Def.</u>- $\mathcal{E} \in Coh(X)$ será excepcional si $Ext^i_{i>0}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$ y $Hom(\mathcal{E},\mathcal{E}) = k$.

<u>Def.</u>- Una colección $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \in \mathcal{D}^b(X)$ es excepcional si los $\mathcal{E}_i$ son exc y $Ext^k(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i) = 0$ $\forall k \geq 0$, $i < j$.

Diremos que $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ colección exc. es full si

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \rangle .$$

<u>Conjetura</u> (Orlov): X variedad proy. admite colección exc. full $\Longleftrightarrow$ X es racional.

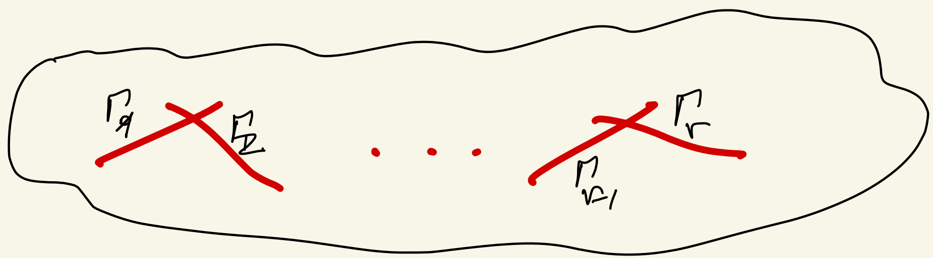
Ej. $X = \mathbb{P}^N$ $\quad \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(N)$ es colección excep.

$$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)) = \mathrm{Ext}^k(\mathcal{O}, \mathcal{O}(i-j)) = H^k(X, \mathcal{O}(i-j))$$

$i = j \quad H^0(X, \mathcal{O}_X) = k \quad H^N(X, \mathcal{O}_X) = 0$

$i < j \quad H^0(X, \mathcal{O}(i-j)) = 0 \quad H^n(X, \mathcal{O}(\underbrace{i-j}_{\geq -n})) = 0.$

Teo: (Beilinson 1978) es full.

Ej. X = 

suave superficie
$q = p_g = 0$

$$\mathcal{O}, \mathcal{O}(\Gamma_1), \mathcal{O}(\Gamma_1 + \Gamma_2), \dots, \mathcal{O}(\Gamma_1 + \dots + \Gamma_r).$$