$$\mathcal{D}^b(X) = \langle E_r, \dots, E_0, \mathcal{A} \rangle$$

s.o.d.

a través de

Colecciones Excepcionales

15/NOV/2022

0. Vez pasada vimos definición de categoría derivada de una categoría abeliana, y sus descomposiciones semi-ortogonales (s.o.d.). Particularmente nos interesa conocer s.o.d. en la categoría derivada acotada $\mathcal{D}^b(X)$ de una variedad X (donde la categoría abeliana es $Coh(X)$).

Recordar: Una full subcategoría $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es admisible si $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ tiene adjunto por la derecha $i^!$ e izquierda $i^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Así tenemos s.o.d.'s

$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ tiene adj. izq. si $\exists G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ $Hom(GB, A) = Hom(B, FA)$ similar derecho

$$\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \rangle \qquad \mathcal{B} = \langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$$

donde ${}^{\perp}\mathcal{A} = \{ T \in \mathcal{B} : Hom(T, A[t]) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}, t \in \mathbb{Z} \}$

$\mathcal{A}^{\perp} = \{ T \in \mathcal{B} : Hom(A[t], T) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}, t \in \mathbb{Z} \}$

1. (Sacado de charla de Jenia 13/Agosto/19)

Considerar espacio vectorial V de dimensión finita junto con una forma bilineal $(\cdot,\cdot)$: $(u,v) = u^t B v$, B matriz de Gram

No asumir B simétrica o antisimétrica, solo asumir B invertible.

Def.- $\mathcal{U} \subset V$ es **admisible** si $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{U}}$ no es degenerada.

Definir $\mathcal{U}^\perp = \{ v \in V : (u,v) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \}$

$^\perp\mathcal{U} = \{ v \in V : (v,u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \}$

$\mathcal{U}$ admisible $\iff V = \mathcal{U} \oplus {}^\perp\mathcal{U} \iff V = \mathcal{U}^\perp \oplus \mathcal{U}$

Equivalentemente: $\mathcal{U} \subset V$ admisible $\iff i : \mathcal{U} \hookrightarrow V$ (inclusión lineal) tiene morfismos adjuntos izq y derecho $i^*, i^! : V \longrightarrow \mathcal{U}$

tal que

$\forall u \in \mathcal{U},\ v \in V \quad (i(u), v) = (u, i^!(v))\ , \quad (v, i(u)) = (i^*(v), u)$.

proy de v con ${}^{\perp}\mathcal{U}$ proy de v con $\mathcal{U}^{\perp}$

<u>Def</u> Una s.o.d. para V es $V = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$ tal que

$(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j) = 0 \quad \forall i > j$.

<u>Caso especial</u>: $\dim \mathcal{U}_i = 1$, $\mathcal{U}_i = \langle e_i \rangle$ con $(e_i, e_i) = 1$

$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

<u>Ej</u> $B = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\delta \in \mathbb{Z}_{>0} \Rightarrow \{e_1, e_2\}$ es ortogonal.

Definir $e_i \in V \quad \forall i \in \mathbb{Z}$, $e_{i-1} + e_{i+1} = \delta e_i$

Tarea: $\{e_i, e_{i+1}\}$ es base ortogonal con el mismo B.
estas serán las mutaciones.

2. Volvemos a $\mathcal{D}^b(X)$.

Def.- Un objeto $A \in \mathcal{D}^b(X)$ es excepcional si
$$\mathrm{Hom}(A, A[i]) = 0 \quad \forall i \neq 0, \quad \mathrm{Hom}(A,A) = \mathbb{C}.$$

Yoga: Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[\ell]) = \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

- Tomar resolución injectiva $0 \to \mathcal{G} \to I^0$ y así

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\text{q.is}"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\ \cdots \arrow[r] & I^{\ell-1} \arrow[r] & I^\ell \arrow[r] & I^{\ell+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \quad (*)$$

y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}$, tomar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \text{——})$
cat homot.

$$\Rightarrow \ \cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, I^{\ell-1}) \xrightarrow{d^{\ell-1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, I^\ell) \xrightarrow{d^\ell} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, I^{\ell+1}) \to \cdots$$

$$\overset{\psi}{k} \longmapsto d^{\ell-1} \circ k$$

es decir, $\operatorname{Im} d^{\ell-1}$ corresponden a las homotopías.

Por otro lado, $\ker d^{\ell}$ son los morfismos en $(*)$

Así $\operatorname{Hom}(*)$ salvo homotopías es $\ker d^{\ell} / \operatorname{Im} d^{\ell-1} = \operatorname{Ext}^{\ell}_{A}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

ÚTIL: (Hartshorne III Prop. 6.7)
Si $\mathcal{L}$ es localmente libre de rango finito y $\mathcal{L}^{\vee}$ su dual, entonces $\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \operatorname{Mod}(X)$ (X espacio anillado con $\mathcal{O}_X$) tenemos

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \simeq \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{G})$$

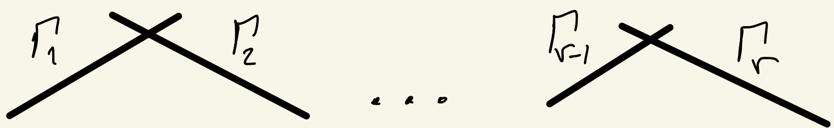
$$\left(\text{y } \operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G})\right) \ \forall i.$$

Ej.- X $p_g = q = 0$ $\Rightarrow$ todo $\mathcal{L}$ linebundle es excepcional.

Def.- Una <u>colección excepcional</u> $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r$ es una colección de objetos excepcionales y $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j[k]) = 0$ $\forall k$, $\forall i > j$.

$$\therefore \quad D^b(X) = \langle \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r, \mathcal{A} \rangle .$$

Ej.-



$\subset$ superficie suave X

$\mathbb{P}^2$ y Blups $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(\Gamma_1), \mathcal{O}_X(\Gamma_1 + \Gamma_2), \dots, \mathcal{O}_X(\Gamma_1 + \dots + \Gamma_r)$

es una colección excepcional.

<u>Conj de Orlov</u>: Las únicas variedades proyectivas suaves que admiten una colección excepcional full son las racionales.

<u>Obs</u>: Entre más excepcional tenemos, menos espacio queda para la componente de Kuznetsov. Pero puede haber mucho en los morfismos!

3. Si X es una curva suave proy $\Rightarrow$ $X = \mathbb{P}^1$ tiene col. excep. y full ; $X \neq \mathbb{P}^1 \Rightarrow D^b(X)$ es indescomponible.

Para toda dimensión hay s.o.d., pero parece haber restricción en cuáles: minimales tienden a ser indescomponibles. Por ejemplo, si K_X está generada por secciones globales entonces $D^b(X)$ entonces <u>No</u> tiene objetos excepcionales.

(Mirror "s.o. decomposability of D^b(curve)" Sh. Okawa 2011)

Por otro lado:

$\boxed{\text{Conjetura (Xun Lin 2021): Asumir que } X \text{ es proy. nosingular con } K_X \text{ neg y efectiva} \Rightarrow D^b(X) \text{ es indescomponible.}}$

Por el mismo lado, Xun Lin 2021 demuestra:

Teo: X var. proy. nosingular con $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Sea Z = puntos base de K_X.

Si $D^b(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ s.o.d. entonces uno de los dos sucede:

(1) $\forall\, x \in X \setminus Z$, $k(x) \in \mathcal{A}$ (y Supp de $B \in \mathcal{B} \subset Z$)

(2) $\forall\, x \in X \setminus Z$, $k(x) \in \mathcal{B}$ (y " " " $\mathcal{A} \subset Z$)

4. Dada una cat. Δada $\mathcal{T}$, su grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{T})$ se define como el cociente del grupo libre abeliano de las clases de isomorfismo de objetos en $\mathcal{T}$ cocientado por

$$[\mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_3]$$

donde $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3$ es Δ distinguido en $\mathcal{T}$.

Nota: $[\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'] = [\mathcal{F}] + [\mathcal{F}']$

$$[\mathcal{F}[1]] = -[\mathcal{F}]$$

<u>Definición</u>: $\mathcal{D}^{perf}(X) \subset \mathcal{D}(X)$ para X k-esquema

es la sub-cat Δ de los complejos ajis a uno acotado de haces localmente libres.

Si X es nosingular $\underset{(\text{Hilbert})}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{D}^{perf}(X) = \mathcal{D}^b(X)$.

Luego: $G_0(X) = K_0(\mathcal{D}^b(X))$ $K_0(X) = K_0(\mathcal{D}^{perf}(X))$

Si $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ s.o.d

$\Rightarrow K_0(\mathcal{T}) = K_0(\mathcal{A}_1) \oplus K_0(\mathcal{A}_2) \oplus \cdots \oplus K_0(\mathcal{A}_n)$.

5. De ahora en adelante $\dim X = 2$ y $p_g = q = 0$ si X es nosingular.

<u>Lema</u> (KKS "Derived cat. of singular surfaces" Lemma 4.2)

Sea X = proy normal superficie con sing. racionales

$\Rightarrow$ $\underbrace{(rk, c_1, \chi)}_{}: G_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus Cl(X) \oplus \mathbb{Z}$

es un isomorfismo.

son funciones aditivas bien definidas alternantemente.

<u>obs</u>) Si X es nosing $\Rightarrow$ $G_0(X) = K_0(X) = K_0(\mathcal{D}^b(X))$

y $Cl(X) = Pic(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$ $(p_g = q = 0)$

y así el largo máximo de una colección excepcional es $b_2(X) + 2 = \chi_{top}(X)$.

En este caso, $\mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$ es el reticulado de Mukai con Euler pairing:

$$\chi(A,B) = \sum (-1)^i \operatorname{ext}^i(\alpha, \beta).$$

Luego: $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r, A \rangle$

Produce estas matrices de Gram como en espacios vectoriales.

Luego: Una manera de detectar que algo se puede descomponer maximalmente es mirando tales matrices.

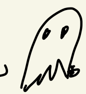
Pasa también que

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\chi_{top}(X)}, \mathcal{A} \rangle$$

y $K_0(\mathcal{A}) = 0$ y Hochschild homology $HH_k(\mathcal{A}) = \bigoplus_{q-p=k} H^{p,q}(\mathcal{A}) = 0$

son cero, pero $\mathcal{A} \neq 0$.

[ver Cho-Lee para un ejemplo con $D_{2,3}$]

$\mathcal{A}$ es categoría fantasma 

6. ¿Qué largos máximos se pueden encontrar?

La idea es explorar el reticulado de Mukai a través de colecciones excepcionales numéricas:

$\{E_1, \dots, E_r\}$ con $\chi(E_i, E_i) = 1$

y $\chi(E_j, E_i) = 0 \quad \forall j > i$.

El siguiente teorema de Viol 2017 produce una receta para encontrar colecciones excepcionales de line bundles (obj excepcionales con $rk = 1$). Su importancia está en relación a un teorema de Perling: Si $E_1, \ldots, E_r$ es colección excep. largo máximo $\Rightarrow$ se puede mutar a colección numérica de line bundles.

Teorema (Viol 2017): Sea X = sup. proy. suave con $\chi(\mathcal{O}_X)=1$ y sea $r\geq 0$ entero.

$(E_0, E_1, \dots, E_{r+1})$ ~~e~~.e.n. de line bundles $\Leftrightarrow$ $(E_0, \dots, E_{r+1})$ c.e.n. de n. line bundles $\left[\begin{matrix}\text{except object rank} = 1 \\ [\dim_{K(X)} Z_q = 1] \Rightarrow c_2 = 0\end{matrix}\right]$ $\Leftrightarrow$ $\exists D_1, \dots, D_{r+1} \in NS(X)$ tal que $K_X \cdot D_i = -2-(D_i)^2 \ \forall i$ y $(D_i \cdot D_j) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & a_{r+1}\end{pmatrix}$ numerical rational chain

Dem: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓ (ii) $\Rightarrow$ (iii) Definir $D_i := c_1(E_i) - c_1(E_{i-1})$. Luego para $0 \leq i < j \leq r+1$

$\chi(E_j, E_i) = 0 \Rightarrow (D_{i+1} + D_{i+2} + \dots + D_j)^2 + K_X \cdot (D_{i+1} + \dots + D_j) = -2$.

$j = i+1 \Rightarrow K_X \cdot D_i = -2 - D_i^2 \ \forall i$. $j = i+2 \Rightarrow D_k \cdot D_l = 1 \quad |k-l| = 1$. $j = i+3, i+4, \dots \quad D_i \cdot D_j = 0 \quad |i-j| > 1$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $E_0 := \mathcal{O}_X$, $E_i := \mathcal{O}_X(D_1 + \dots + D_i) \quad 1 \leq i \leq r+1$. Como $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$

$\Rightarrow \chi(E_i, E_i) = 1 \ \forall i$ por R-R $\chi(E_j, E_i) = 0 \ \forall 0 \leq i < j \leq r+1$

donde $\underline{\chi(E,F)} = \frac{1}{2}(c_1(F) - c_1(E))^2 - \frac{1}{2} K_S \cdot (c_1(F) - c_1(E)) + 1$ para n line bundles en $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$.