Mutaciones
y aspectos Cot
de N-res
22/Nov/22

Teorema (Perling 2018): Para $E_1, \dots, E_n$ de largo máximo numérico en $p_g = q = 0$ superficie
$\Rightarrow$ Se puede mutar a obj. numericamente line bundles y se le puede hacer corresponder una superficie tórica Y con solo sing. de Wahl (o puntos suaves) en los puntos distinguidos tal que si X es racional $\Rightarrow$ un $\mathbb{Q}$-Gor. smooth de Y es X y la colección viene de Hacking.

I) Con el teorema de Vial "esencialmente todo viene de cadenas racionales" se puede demostrar:

Teorema (Vial Thm 3.10) S = sup. proy. racional $p_g = q = 0$

- Si S no es minimal $\Rightarrow$ S tiene c.n.e. de largo max.

Asumir que S es minimal:

- $\kappa(S) = -\infty$ $\Rightarrow$ S tiene c.n.e. largo max.
- $\kappa(S) = 0$ $\Rightarrow$ S es Enriques y no tiene ($\chi_{top} = 12$)

(largo 10 se puede)

- $\kappa(S) = 1 \Rightarrow$ para tener c.n.e de largo max, S debe ser Dolgachev $D_{p_1,\dots,p_n}$ y sucede para $D_{2,3}$, $D_{2,4}$, $D_{3,3}$ y $D_{2,2,2}$. [Definir $D_{p_1,\dots,p_n}$ con log transform]

  (largo 10 se puede para $D_{p,q}$ con $mcd(p,q)=1$ y $D_{p,p}$)

- $\kappa(S) = 2 \Rightarrow S$ siempre tiene una c.n.e. de largo maximo.

II **Problema**: Realizarla como coleccion excepcional.

Ej: Cho-Lee en $D_{2,3}$, hay varios ejemplos...

Obs/r Salvo un blow-up todos tendrían.

¿Qué representa $\langle \mathcal{E}_0, .., \mathcal{E}_r \rangle$ en caso de encontrarla?

El punto: Dada una tal colección, se puede siempre modificar y así obtener alguna con mejores propiedades.

Por ejemplo: Una strong colección excepcional es una $\langle \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_r \rangle$ tal que además

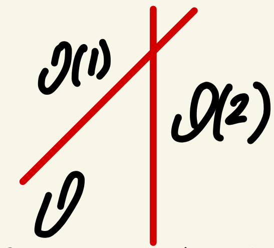
$$\operatorname{Ext}^k(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0 \quad \text{si } i<j \quad k>0.$$

Teorema (Bondal 1990 "Representation of associative algebras and coherent sheaves")
(Thm 6.2)

Dada una colección excepcional strong $\Rightarrow \langle \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_r \rangle \underset{\text{equiv}}{\equiv} D^b(A\text{-mod})$ de módulos f.g. sobre $A = \mathrm{Hom}(E, E)$ con $E = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{E}_i$. El álgebra A es un path álgebra de un Quiver con relaciones, donde Q tiene $r+1$ vértices $P_0, \dots, P_r$ y los caminos totales entre P_i y P_j son $\hom(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$.

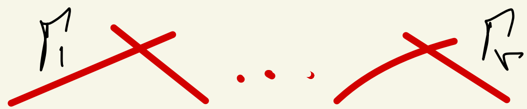
Ejl.- en $\mathbb{R}^2$, $\langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle$ es strong y

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[r, bend right, "\varphi_3"'] & \bullet \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[r, bend right, "\varphi_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$



relaciones: $\varphi_i \varphi_j = \varphi_j \varphi_i$ $\quad i,j = 1,2,3$

Pero



no funcionan de forma que $\mathcal{O}, \mathcal{O}(\Gamma_1), \mathcal{O}(\Gamma_1+\Gamma_2), \ldots, \mathcal{O}(\Gamma_1+\cdots+\Gamma_r)$ sea strong.

III <u>Mutaciones</u>: [ver Bondal mismo paper §2 aunque notación es un poco diferente]

Sea Y una var. proy. suave y $\langle F, E\rangle \subset \mathcal{D}^b(Y)$ excepcional. Entonces

$$\langle E, R_E F\rangle = \langle L_E(F), E\rangle = \langle F, E\rangle$$

donde

$$\underbrace{E \otimes R\mathcal{H}om(E,F) \to F \to L_E(F)}_{\text{i.e. cono}} \longrightarrow$$

y

$$\underbrace{R_E(F)}_{\text{se puede ver como cono } (ev^\vee)} \longrightarrow F \longrightarrow E \otimes R\mathcal{H}om(F,E)^\vee \longrightarrow$$

.

Obs.- ver Gorodentsev, Rudakov 1987 en relación a $\mathbb{P}^2$ y la ecuación de Markov.

Propiedades

(1) $R_i L_i = \mathbb{1}$ (regreso a lo mismo)

(2) Si $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_r$ excepcional, entonces el grupo de $r+1$ trenzas actua en $\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r \rangle$, dando colecciones excepcionales y el mismo pedazo en $D^b(Y)$.

BACK TO $\boxed{\text{N-res}}$ **paper**: Digamos que

(1) 

$\subset W \longrightarrow p \in \overline{W} = \frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$

(2) $p_g = q = 0$

(3) $\exists$ Tóric equal boundaries $A, \bar{A}$

(4) No obstructions

e.g. (1) + (2) y $\pi_1(\overline{W} \setminus p)$ trivial $\Rightarrow$ (3)

IV

<u>Teo 1.12</u>: Tenemos $\underbrace{\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r \rangle}_{\text{Hocking exc. coll. H.e.C.}}$ en $\underbrace{Y \rightsquigarrow W}_{\mathcal{W}}$

y es compatible con W y en términos de $\mathcal{D}^b$.

Aquí hay una historia también:

(1) Hocking construye $\mathcal{E}$ para $X \ni \frac{1}{n}(1,a)$ en $\mathbb{Q}$-Gor suave de rango n y excepcional.

(2) Kawamata reinterpreta usando el borde tórico y creando un vector bundle de rango n que deforma a $\mathcal{E}^{\oplus n}$

(3) Esto se pone en cadena tal que

$$\mathcal{O}_W(-A-\Gamma_1-\dots-\Gamma_r),\ \dots\ ,\ \mathcal{O}_W(-A-\Gamma_1),\ \mathcal{O}_W(-A)$$

Kawamata descomp. para $\mathcal{D}^b(W)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

maximal% extensión iterada producen los v. b. Kawamata F_i de rango n

estos se levantan a $\mathcal{F}_i$ en $\mathcal{X}$ y $\langle \mathcal{F}_i|_Y \rangle = \langle \mathcal{E}_i \rangle$
Hacking

$\operatorname{rank}(\mathcal{E}_i) = n_i$,

$$c_1(\mathcal{E}_i) = -n_i(A+\Gamma_1+\dots+\Gamma_i) \in H_2(Y).$$

$$c_2(\mathcal{E}_i) = \frac{n_i-1}{2n_i}\left(c_1(\mathcal{E}_i)^2 + n_i + 1\right)$$

y $\langle \mathcal{E}_r, \mathcal{E}_{r-1}, \dots, \mathcal{E}_0 \rangle$ forman una colección excepcional.

Teo 1.10:

$$\begin{tikzcd}
W^+ \arrow[r, "M\text{-res}"] & P \in \overline{W} & W^- \arrow[l, "N\text{-res}"'] \\
& Y \arrow[ul, squiggly] \arrow[u, squiggly] \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

Y general smoothing en la corresp. comp. de $\mathrm{Def}(\overline{W})$.

$\Rightarrow \exists \langle E_r, \dots, E_0 \rangle$ y $\langle \overline{E}_r, \dots, \overline{E}_0 \rangle$ y el Kawamata v.b. deforma a

$$F \simeq \bigoplus_{i=0}^{r} \overline{E}_i^{\,n_{r-i}}$$

donde $\left(\text{Así } \Delta = n_0\bar{n}_r + n_1\bar{n}_{r-1} + \dots + n_r\bar{n}_0\right)$

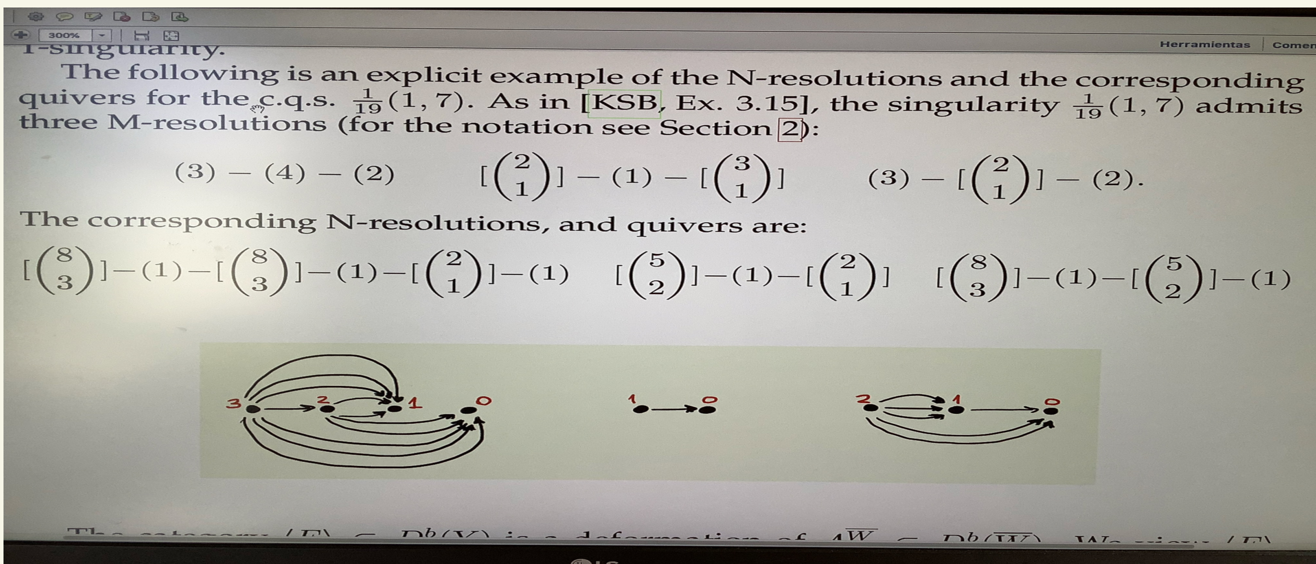
- $\bar{E}_r, \dots, \bar{E}_0$ es strong e.c. $\left(\begin{array}{l} Ext^k(\bar{E}_i, \bar{E}_j) = 0 \\ \forall k > 0,\ i > j \end{array}\right)$
- $Ext^k(E_i, E_j) = 0$ para $k \neq 1$, $i > j$.
- $hom(\bar{E}_{r+1-i}, \bar{E}_{r-i}) = ext^1(E_i, E_{i-1}) = S_i$ $\forall i = 1, \dots, r$.

El algebra de Koszul-Kormozyn

$$\bar{R} = End(\bar{F})$$

deforma a $\mathrm{End}(F)$ y $\langle \bar{E}_r, \ldots, \bar{E}_0 \rangle$ es equivalente a $D^b(\hat{R}\text{-mod})$ donde

$$\hat{R} = \mathrm{End}(\bar{E}_r \oplus \ldots \oplus \bar{E}_0).$$



T-singularity.

The following is an explicit example of the N-resolutions and the corresponding quivers for the c.q.s. $\frac{1}{19}(1,7)$. As in [KSB, Ex. 3.15], the singularity $\frac{1}{19}(1,7)$ admits three M-resolutions (for the notation see Section 2):

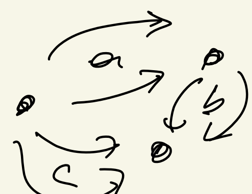
$$(3) - (4) - (2) \qquad [\binom{2}{1}] - (1) - [\binom{3}{1}] \qquad (3) - [\binom{2}{1}] - (2).$$

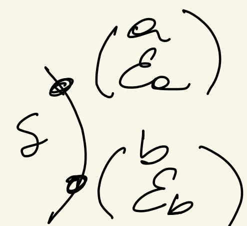
The corresponding N-resolutions, and quivers are:

$$[\binom{8}{3}]-(1)-[\binom{8}{3}]-(1)-[\binom{2}{1}]-(1) \qquad [\binom{5}{2}]-(1)-[\binom{2}{1}] \qquad [\binom{8}{3}]-(1)-[\binom{5}{2}]-(1)$$

Cor: Toda superficie de Dolgachev $D_{p,q}$ con p,q coprimos admite una colección excep. strong de largo 10 y el complemento tiene matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3(pq-p-q) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Cor: $D^b(kQ\text{-mod}) \hookrightarrow D^b(\text{superficie})$

con $Q = Q_{abc}$  a través de n-res

$\iff$ $\exists$ P-resolución extremal  $S = C$.