16/08/

N-Res 2: Singularidades cíclicas. (Repaso).

- Superficies sing (irred normales) $(x \in \overline{X})$
- Resolución de sing, $\pi : \underset{\underset{\mathrm{Exc}(\pi) = \sum E_i \mapsto x}{\cup\!\mid}}{X} \longrightarrow \overline{X}$ y $(E_i \cdot E_j)$ matriz

def negativa $\left[E_i^2 < 0 \right]$.

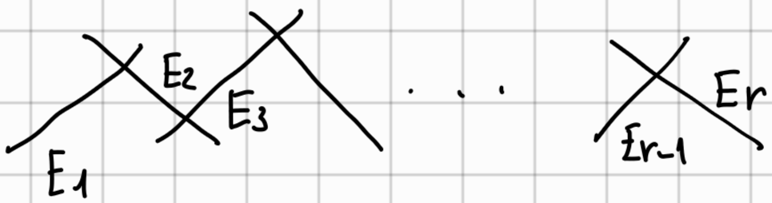
- Singularidades racionales $\Longleftrightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X = 0 \Longleftrightarrow Z$ efectivo supp en Exc $P(Z) \leq 0$.

$\Longleftrightarrow \exists!$ Z ciclo fundamental tal que $P(Z) = 0$.

- (Artin) $X \supseteq \mathrm{Exc} = \sum E_i$, $(E_i \cdot E_j)$ neg def y $P(Z) = 0$.

$\Longrightarrow$ Contraen a sing racional.

E_j: $X \supseteq$



tal que $\begin{bmatrix} -e_1 & 1 & & 0 \\ 1 & -e_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -e_r \end{bmatrix}$ $e_i \geq 2 \ \forall i \Rightarrow Z = \sum_{i=1}^{r} E_i$ ciclo fundamental.

y $P(Z) = 0$.

$\Rightarrow$ $\pi : X \to \overline{X}$ se contrae y p es una singularidad racional.

$$\operatorname{mult}(x \in \overline{X}) = -Z^2 = \sum_{i=1}^{r} (e_i - 2) + 2.$$

dimensión de incrustación de $(x \in \overline{X})$ $= -Z^2 + 1$.

Tarea: Calcular M^{-1}.
Al final de estas notas

Hoy:

Sea $m \in \mathbb{N}^{>0}$.

Def: Consideran $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{N}^{>0}$, coprimos a m.

$$\mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$$
$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (\mu^{a_1} x_1, \ldots, \mu^{a_d} x_d)$$

donde μ m-ésima primitiva de la unidad.

T es automorfismo de orden m. Por lo tanto, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]^{\mathbb{Z}/m}$ es f.g como $\mathbb{C}$-álgebra.

$\Rightarrow$ $\exists$ cociente: $\mathbb{C}^d / (\mathbb{Z}/m) := \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y])^{\mathbb{Z}/m}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}^d \xrightarrow[m:1]{\sigma} \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}/m$, el germen en $(0, \ldots, 0)$ es la singularidad cíclica (por def) $\frac{1}{m}(a_1, \ldots, a_r)$.

$d=1$ $\quad \mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}$, $\quad z \longmapsto \nu z$ $\quad \Rightarrow \mathbb{C}/\langle T\rangle$ es suave!

$d=2$ $\quad \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ $\quad \frac{1}{m}(1,q)$

$\Updownarrow$

$a_1 t \equiv 1 \pmod m$

$t a_2 \equiv q \pmod m$

Singularidades de Hirzebruch-Jung.

$d \geq 3$ También son singulares, pero son rígidas

(Schesinger 1971).

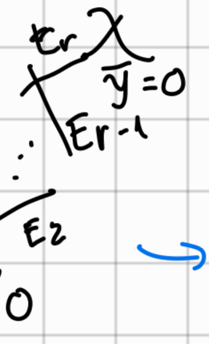
Para el caso $d=2$ tenemos el panorama algebraico:

$$\mathbb{C}[x,y] \supseteq \mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/m} \supseteq \mathbb{C}[\underbrace{x^m}_{u}, \underbrace{y^m}_{v}, \underbrace{x^{m-q}y}_{w}] \supseteq \mathbb{C}[\underbrace{x^m, y^m}_{u,\ v}]$$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{m:1} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}/m \xrightarrow[\text{normalización}]{1:1} \underbrace{\{w^m = u^{m-q}v\} \xrightarrow{m:1} \mathbb{C}^2_{u,v}.}_{\text{raíces } m\text{-ésimas de divisores.}}$$

$\pi \uparrow$

Por medio tórico se puede resolver a través de .

X 

$\hookrightarrow$ donde $\frac{m}{q} = e_1 - \cfrac{1}{e_2 - \cfrac{1}{e_3 - \ddots - \cfrac{1}{e_r}}} = [e_1, \dots, e_r]$, $E_i^2 = -e_i$

$E_i \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

¿Son la misma singularidad?

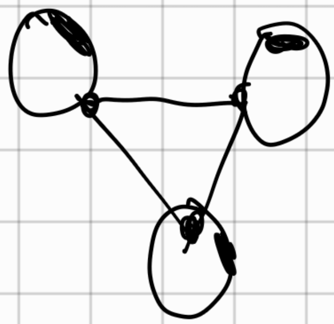
Laufer: (70's) Si $\pi: X \longrightarrow \overline{X}$ es resolución <u>minimal</u>

$$\sum E_i = Exc \longmapsto x$$

$\exists!$ cadena con <u>cruces normales simples</u>.

Se define el grafo topológico:

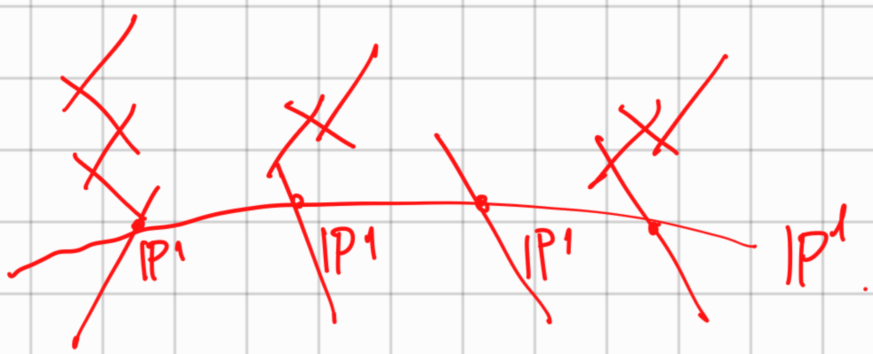
- Vértices son los E_i
- Aristas son las intersecciones entre E_i, E_j
- Decoración extra de los vértices (~~género~~ E_i ?)



Def: Una $(x\in\overline{X})$ es <u>Taut</u> si dado $(y\in\overline{Y})$ con el mismo grafo $\Rightarrow (x\in\overline{X}) \cong (y\in\overline{Y})$

Laufer: Las clasifica todas Taut $\supseteq$ Sing cíclicas.

Ej:



Ecuaciones para $\frac{1}{m}(1,q)$: $\quad 0<q<m$, $\mathrm{mcd}(q,m)=1$.

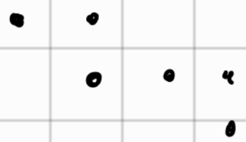
$0<q<m$, $\mathrm{mcd}(q,m)=1$.

Considerar $\dfrac{m}{m-q} := [b_1,\dots,b_s]$,

Ej: $\dfrac{m}{m-1} = \underbrace{[2,\dots,2]}_{m-1}$, $\dfrac{m}{1} = [m]$

$\dfrac{19}{7} = [3,4,2]$, $\dfrac{19}{12} = [\ ?\ ]$.

• Diagrama de puntos de Riemenschneider (Est de Hirzebruch).



$\xrightarrow{+1} [3,4,2]$

$\downarrow +1$

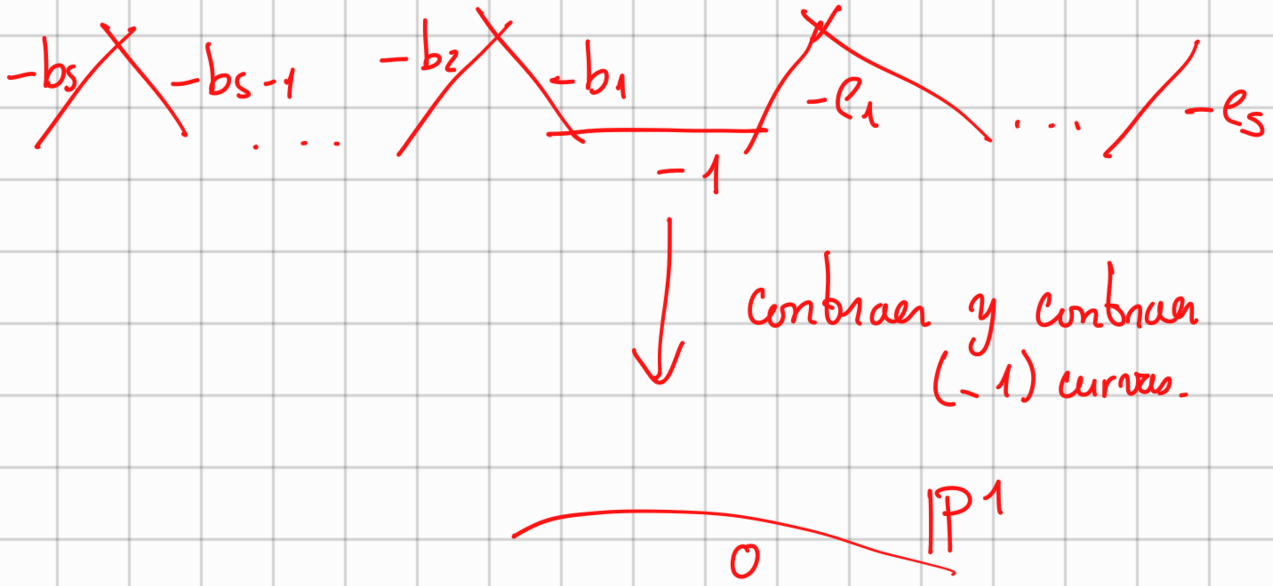
$[2,3,2,3]$ es la fracción dual, $\dfrac{19}{12} = [2,3,2,3]$

* Es teorema:

Teo: $[b_s,\dots,b_1,1,e_1,\dots,e_r] = 0$

$\iff$ diagrama de puntos.

* Cuidado con dividir por cero cuando consideren fracciones continuas con 1.



Todas las fracciones continuas de 0 satisfacen ese proceso

$$a+1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{b+1}} = a-\frac{1}{b}.$$

$$\begin{tikzcd}
0 = [0] \arrow[r] & {[1,1]} \arrow[r] \arrow[dr] & {[2,1,2]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & {} \\
 & & {[1,2,1]} \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[r] & {} \\
 & & {} & {}
\end{tikzcd}$$

Ecuaciones de las superficies involucradas en la resolución:

Se puede representar $\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/m}$ como

$$\mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_s, z_{s+1}] \Big/ \langle z_i z_j - z_{j-1} z_{j-1}^{b_{j-1}-2} \cdots z_{i+1}^{b_{i+1}-2} z_{i+1} \mid 0 \le i < j \le s+1 \rangle$$

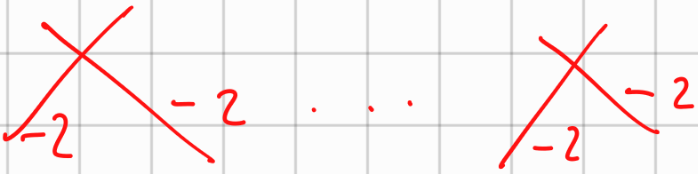
dim incrustación $\leq s+2$.

$$\sum_{i=1}^{r} (e_i - 2) + 3 = s+2 \quad \checkmark$$

Ej: $m, \; q = m-1$

$$\frac{m}{m-1} = [2, \dots, 2] \qquad \frac{m}{1} = [m] \quad , s = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2] \big/ \langle z_0 z_2 - z_1^m \rangle$$



$$\frac{m}{1} = [m] \quad , \quad \frac{m}{m-1} = [2, \dots, 2] \qquad m-1 = s.$$

$$\mathbb{C}[z_0, \dots, z_m] \big/ \langle z_i z_j - z_{j-1} z_{i+1} \rangle \qquad 0 \leq i < j \leq m.$$

Como curva racional de grado m

$$\cong \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$[x^m : x^{m-1}y : \dots : y^m].$$

• Sumas de Dedekind:

Def: Dados $0<q<m$ coprimos y se define

$$s(q,m)=\sum_{i=1}^{m-1}\left(\left(\frac{i}{m}\right)\right)\left(\left(\frac{iq}{m}\right)\right) \quad \text{donde } ((x))=\{x\}-\frac{1}{2},$$

Resulta: $$\underbrace{12\,S(q,m)}_{\chi(\mathcal{O}_X)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r}(e_i-2)+\frac{q+q'}{m}}_{K_X^2} + \underbrace{-r}_{\chi_{top}(X)}.$$

Con superficies

Esto es la fórmula de Noether:

y aparece en geometría (Hirzenbruch - Zagier I / Paul Gurmells II).

* Calculo de M^{-1}.

Para una matriz tridiagonal existen fórmulas recursivas para su inversa (Usmani 94').

$$(M^{-1})_{ij}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{i+j}\,\theta_{i-1}\,\varphi_{j+1}}{\det(M)} & \text{si } i\leq j\\[2ex] \dfrac{(-1)^{i+j}\,\theta_{j-1}\,\varphi_{i+1}}{\det(M)} & \text{si } i>j\end{cases}$$

Donde $\theta_i=\begin{cases}-e_i\theta_{i-1}-\theta_{i-2}, & i\geq 2\\ \theta_1=-e_1\\ \theta_0=1\end{cases}$ $\quad\varphi_i=\begin{cases}-e_i\varphi_{i+1}-\varphi_{i+2} & i\leq n-1\\ \varphi_n=-e_n\\ \varphi_{n+1}=1\end{cases}$

Si tomamos $-M$ encontramos una manera sencilla de calcular el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} e_1 & -1 & & & & & \\ -1 & e_2 & -1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & -1 & & \\ & 0 & & -1 & e_r & & \\ & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & -1 & e_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & -1 & & & & \\ 0 & e_2 - \frac{1}{e_1} & -1 & & & \\ & 0 & \ddots & -1 & & \\ & & & [e_r, \dots, e_1] & -1 & \\ & 0 & & 0 & \ddots & \\ & & & & 0 & [e_n, \dots, e_1] \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [e_i, \dots, e_1].$$ Dado que $[a_r, \dots, a_1] = \frac{p_r}{p_{r-1}}$

donde $[a_1, \dots, a_r] = \frac{p_r}{q_r}$ y notamos que

$$[e_1][e_2, e_1] \cdots [e_n, \dots, e_1] = p_1 \frac{p_2}{p_1} \cdots \frac{p_r}{p_{r-1}} \cdots \frac{p_n}{p_{n-1}} = p_n,$$

siendo $p_n = m$ con $\frac{m}{q} = [e_1, \dots, e_n]$.

Por consiguiente: $\det(M) = (-1)^n m$.