SGA 23/08

T-Singularidades:

Lema: $0 < a < n$, $\mathrm{mcd}(n,a) = 1$.

$$\frac{n}{n-a} = [x_1, \dots, x_p], \quad \frac{n}{a} = [y_1, \dots, y_q].$$

$$[[x_p, \dots, x_1, 1, y_1, \dots, y_q] = 0]$$ Esto significa que toda la cadena se contrae a una curva racional con $C^2=0$.

1) $$\frac{n^2}{na-1} = [y_1, \dots, y_{q-1}, y_q + x_p, x_{p-1}, \dots, x_1]$$

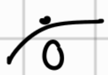
2) $$\frac{n^2}{n^2-na+1} = [x_1, \dots, x_p, 2, y_q, \dots, y_1]$$

3) $$\frac{dn^2}{dn^2-(dna-1)} = [x_1, \dots, x_p, 1+d, y_q, \dots, y_1]$$

4) $$[x_p, \dots, x_1, 1, y_1, \dots, y_q, y_q + x_p, \dots, x_1] = [x_p, \dots, x_1].$$

Def: [Kollár-Shepherd-Barron] Una singularidad T es una cociente (dim 2) que posee una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

i.e
$$\begin{array}{ccc} (x \in \overline{X}) & \subseteq & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$$



$\mathbb{D}$ = germen de una curva suave.

y $\mathcal{X}_t$ = suave y $K_{\mathcal{X}}$ - $\mathbb{Q}$ Cartier con $t \neq 0$.

[KSB]. T-Sing ssi:

1) ADE $\Leftrightarrow$ Du Val $\Leftrightarrow$ Puntos racionales dobles.

2) $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$ con $d \geq 1$, $mcd(n,a)=1$

Las importantes son: Sing de Wahl.

* $d=1$, $\left[\frac{1}{n^2}(1, na-1)\right]$

Obs: Dado $d \geq 1$, $mcd(n,a)=1$.

$$\Rightarrow \frac{n^2}{na-1} = [e_1, \ldots, e_r]$$

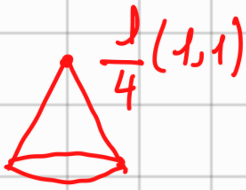
$$\frac{dn^2}{dna-1} = [e_1, \ldots, e_r, \underbrace{1, e_1, \ldots, e_r, \ldots, 1}_{d-1 \text{ veces}}, e_1, \ldots, e_r]$$

Esta fracción parcial induce una resolución parcial de la singularidad.

En donde $K_W \cdot \Gamma_i = 0 \quad \forall i$. Esta es una "N resolución de $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$".

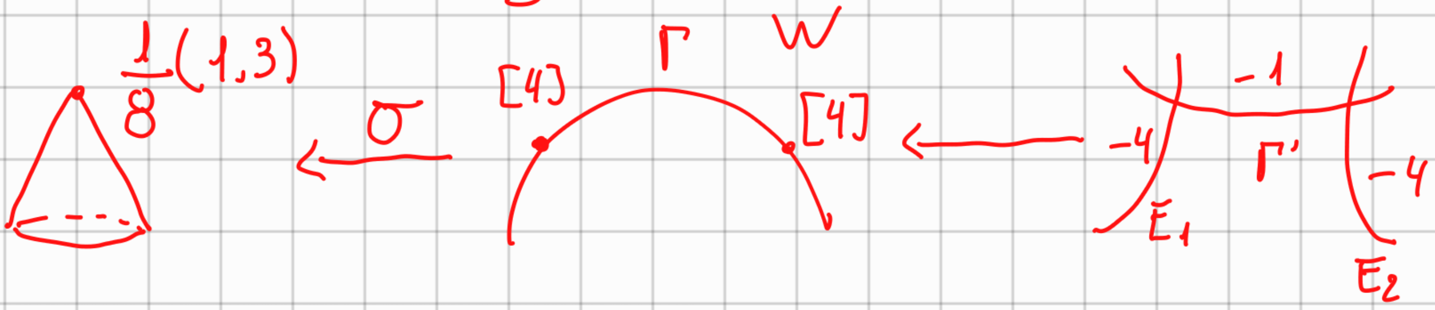
Ej: $n=2$, $a=1$, $d=1$

$\frac{1}{2^2\cdot 1}(1, 1\cdot 2-1) = \frac{1}{4}(1,1) \xrightarrow{\quad -4 \quad} $



Ahora, con $d=2$

$\frac{1}{2\cdot 2^2}(1, 2\cdot 2-1) = \frac{1}{8}(1,3)$, y al hacer blow-up a la fracción, notamos que $\frac{8}{3} = [4,1,4]$



$\Gamma\cdot K_W = ?$ $\Rightarrow$ $\Gamma\cdot K_W = \pi^*(\Gamma)\cdot\pi^*(K_W)$ por ser π biracional

$= \Gamma'\cdot\pi^*(K_W)$

Al tener $K_{W'} = \pi^* K_W + d(E_1)E_1 + d(E_2)E_2$, por adjunción

$K_{W'}\cdot E_i = 2$. Así $2 = K_{W'}\cdot E_i = d(E_i)E_i^2 = -4\,d(E_i)$

$\Rightarrow d(E_i) = -\frac{1}{2}$.

Ahora, $\Gamma\cdot K_W = \Gamma'\cdot\pi^*(K_W) = \Gamma\cdot K_{\tilde{W}} + \frac{1}{2}E_1\cdot\Gamma + \frac{1}{2}E_1\cdot\Gamma$

Dado que Γ' es (-1), entonces $\Gamma^{1}\cdot K\tilde{w} = -1$

$$\Rightarrow \Gamma\cdot K w = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Lema: $(x \in \overline{X}) = \frac{1}{m}(1,q) \Rightarrow$ Son equivalentes:

1) $m = dn^2$, $q = dna - 1$

2) $K_X^2 \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{m}{\mathrm{mcd}(m, q+1)} \mid \mathrm{mcd}(m, 1+q)$

Dem: Notar que si $\pi : X \to \overline{X}$ es la resolución minimal, entonces

$$K_X^2 = (\pi^* K_{\overline{X}})^2 + \sum_{i=1}^{r}(2-e_i) - \frac{q+q'+2}{m} + 2,$$

con $q'q \equiv 1 \pmod{m}$.

De aquí vemos que si se tiene 1), $q+q'+2 \equiv 0 \pmod{m}$ y por tanto $\frac{q+q'+2}{m} \in \mathbb{Z}$ y así $K_X^2 \in \mathbb{Z}$.

* Otra equivalencia: Teorema: La fracción continua de H-J es:

1) Si $(n=2)$: $[4]$ $(d=1)$, $[3,3]$, $[3,2,3]$, ..., $[3,2,\ldots,2,3]$ donde la cantidad de 2 es $d-2$.

2) Si $[e_1, \dots, e_r]$ lo es $\Rightarrow [e_1+1, e_2, \dots, e_{r-1}, e_r, 2]$

y $[2, e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, e_r, e_r+1]$ también lo son.

3) Todas se forman a partir de (1) aplicando (2) varias veces

Corolario: Si $\frac{dn^2}{dna-1} = [e_1, \dots, e_r]$, $\sum_{i=1}^{r} (e_i - 2) = r - d$.

y así $K_X^2 + r - d + 1$.

Se definen para $[e_1, \dots, e_r]$ los números asociados $\delta_1, \dots, \delta_r$ tq

1) Si $(n=2)$, $[4], [3,3], \dots, [3, 2, \dots, 2, 3]$ tienen $\delta_i = 2$

para $1 \leq i \leq r$.

2) Para $[e_1+1, \dots, e_r, 2]$ tenemos que $\delta_{r+1} := \delta_1 + \delta_r$.

Para $[2, e_1, \dots, e_r, e_r+1]$ tenemos que $\delta_1 := \delta_1 + \delta_r$.

Ej: $[3, 2, 2, 7, 2, 2, 5, 2]$, haciendo el proceso inverso

llegamos a que esta se transforma en $[4] \Rightarrow d = 1$ así que la

singularidad es de Wahl.

Los números asociados son

$$\begin{array}{cccccccc} 13 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 17 \\ \end{array}$$
$$[3,2,2,\boxed{7},2,2,5,2] = \frac{30^2}{30\cdot 13-1}$$

$n = 30 = \delta_1 + \delta_r$
$a = 13 = \delta_1$

* La sucesión de Fibonacci versión T-singularidad

$$\begin{array}{c} 8 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$
$$[3,3,\ldots,3,\boxed{5},3,\ldots,3,2]$$

Obs| $F_{-2} = F_{-1} = 1$

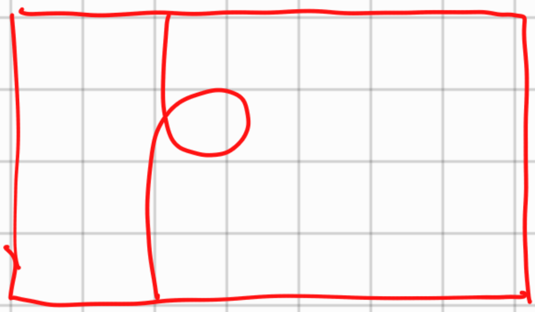
$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \implies \boxed{n \leq F_{r-d}}$

Indice

$\frac{m}{mcd(m,q+1)} = n \quad , \quad m = dn^2$
$q+1 = dna.$

A raíz de la pregunta, si $d=1$ y $[e_1,..,e_r]$ es arbitrariamente larga, ¿Cómo se reflejan las cotas teóricas sobre K_X^2, sabiendo que $K_X^2 = K_{\bar{X}}^2 + r$?

Ej: Para una fibración elíptica inducida por un pencil de curvas

$Bl_9(\mathbb{P}^2) =$  $\longrightarrow \mathbb{P}^2$

$\mathbb{P}^1 \downarrow$

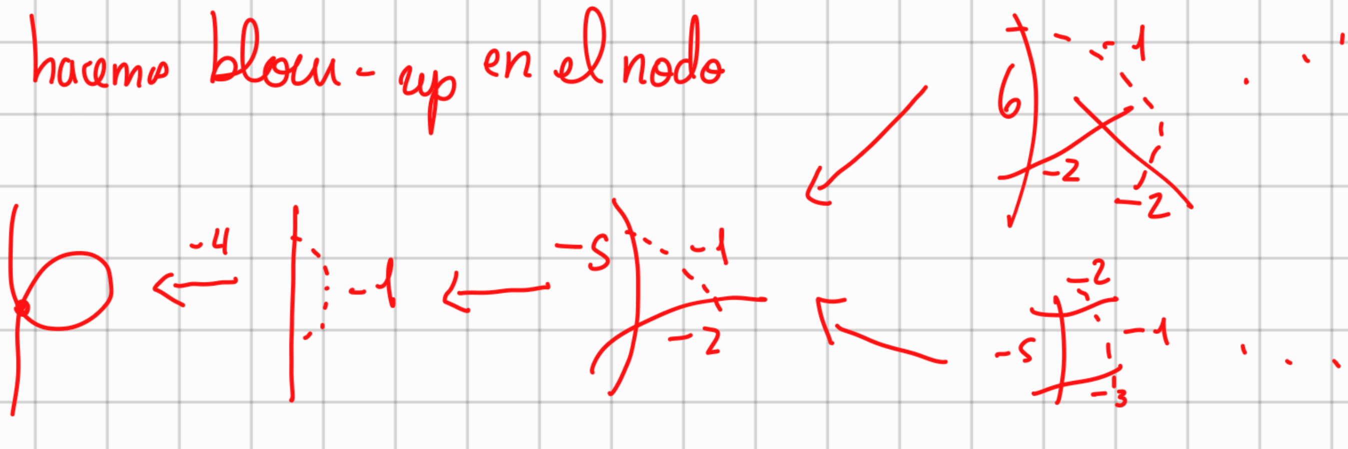
Tiene fibras singulares, dentro de las cuales pueden aparecer configuraciones como:

Un ciclo de d curvas (-2)

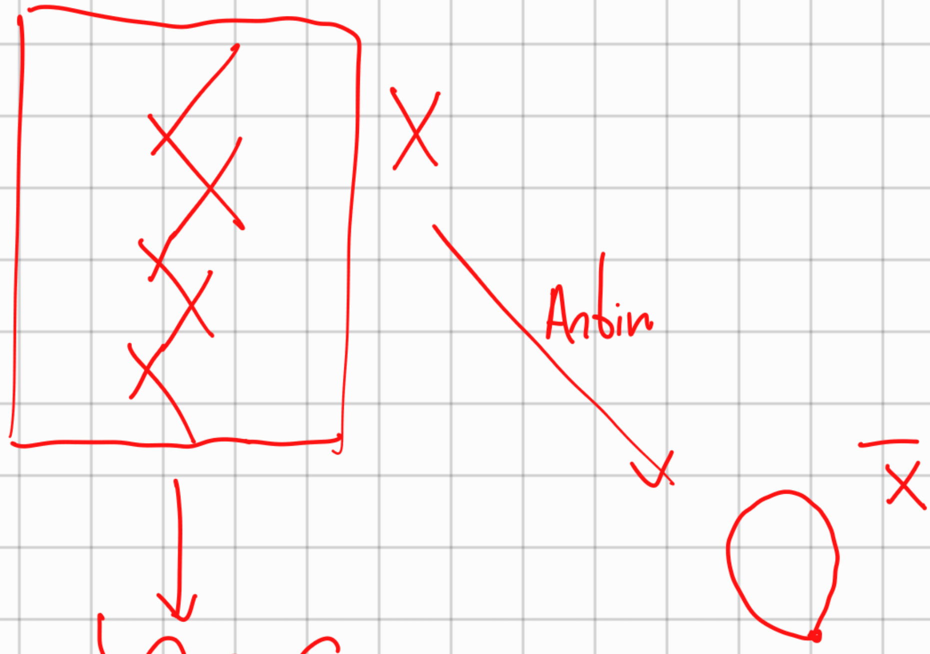
ó $d = 1$ 

(No necesariamente son nodos)
Pueden aparecer cúspides, todo depende del pencil.

Si hacemos blow-up en el nodo



$K_X^2 = K_S^2 - r = -r$



$$K_{\bar{X}}^2 = K_X^2 + r$$
$$= -r + r = 0$$

$\varphi \subset S$

transf logarítmica

$= Y$ superficie suave proy racional.

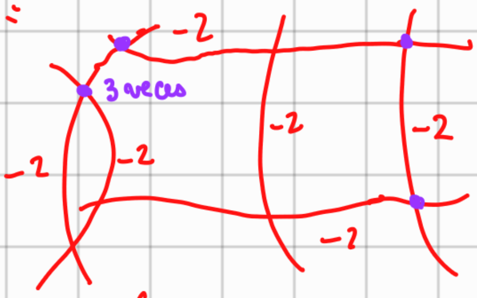
$\frac{1}{n^2}(1, na-1)$

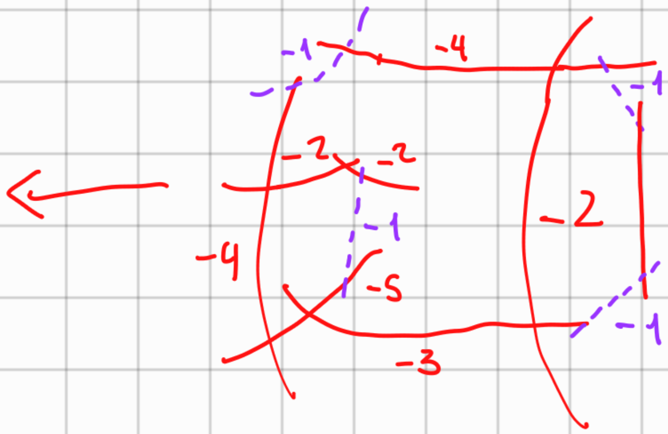
n-Halphen.

$$\boxed{* \text{ Se tiene } K_X = \pi^*(K_{\bar{X}}) - \sum_i \left(1 - \frac{\delta_i}{n}\right) E_i}$$

Ej: $S = K3$, $\pi_1(S) = 1$, $K_S = 0$, $K_S^2 = 0$

S:





; X

6 curvas racionales suaves IP1

Notamos que se obtiene la cadena de Wahl

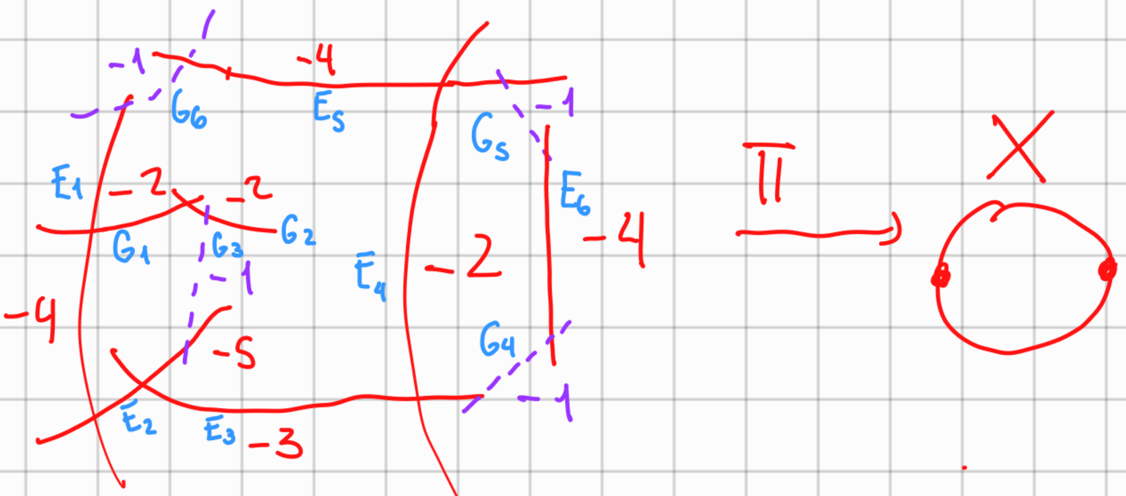
$$d=1 \qquad \begin{array}{ccccccc} 11 & 11 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ \end{array}$$
$$n=27 \qquad [2,2,4,5,3,2,4]$$
$$a=19$$

Y la cadena [4].

Estas cadenas se contraen en una superficie $\overline{X}$ de tipo general ($K_{\overline{X}}^2>0$, $K_{\overline{X}}$ nef) con solo singularidades de Wahl y obstrucción 0.

Se sigue que $K_{\overline{X}}^2 = -6 + \underbrace{1+7}_{\text{longitudes cadenas de Wahl}} = 2$

Con la notación:



Observamos que $K_X = G_1 + 2G_2 + 3G_3 + G_4 + G_5 + G_6$.

$K_X = \pi^* K_{\overline{X}} + \sum_i d(E_i)E_i + \sum_i d(G_i)G_i$. Con discrepancias:

$d(G_2) = -8/27$, $d(E_2) = -26/27$, $d(E_5) = -19/27$

$d(G_1) = -16/27$, $d(E_3) = -25/27$, $d(E_6) = 1$.

$d(E_1) = -24/27$, $d(E_4) = -22/27$

Así, $\pi^* K_X = \frac{35}{27} G_1 + \frac{70}{27} G_2 + 3G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + \frac{24}{27} E_1 + \frac{26}{27} E_2$
$+ \frac{25}{27} E_3 + \frac{22}{27} E_4 + \frac{19}{27} E_5 + E_6.$

* Al ser f biracional sabemos que si Γ es curva en X,

$$\Gamma \cdot K_X = \pi^* \Gamma \cdot \pi^* K_X = \Gamma' \cdot \pi^* K_X$$ siendo Γ' la transformada estricta de Γ bajo f. Notamos que $\Gamma' \cdot \pi^* K_X < 0$ solo es posible con $\Gamma = G_3, G_4, G_5, G_6$. Pero,

$$G_3 \cdot f^* K_X = -3 + \frac{70}{27} + \frac{26}{27} = -3 + \frac{96}{27} = \frac{5}{27} > 0$$

$$G_5 \cdot f^* K_X = -1 + 1 + \frac{25}{27} = \frac{25}{27} > 0$$

$$G_4 \cdot f^* K_X = -1 + 1 + \frac{19}{27} = \frac{19}{27} > 0.$$

Entonces K_X es nef.

Por el criterio de Nakai-Moishezon, tenemos que K_X es amplio. Dado que X tiene obstrucción 0, por medio de los cálculos de arriba garantizamos que la fibra general X_t es de tipo general.